MATEMÁTICAS 3

Lidia Reyes García

EDITORIAL TERRACOTA ET

SECUNDARIA TERCER GRADO

Dirección editorial: Rosa María Núñez Ochoa
Coordinación editorial: Blanca Luz Torres Cano
Edición: Gabriela Valentina Martínez Alemán
Corrección de estilo: Xiomara Ballesteros Quezada, Carmen Hernández Falcón
Lecturas: Carmen Hernández Falcón, Angélica García León, Mario Aburto Castellanos, Valdemar Ramírez Loaeza
Colaboración especial: Diana Paloma Díaz
Diseño de interiores: Martha García © Editorial Terracota S. A. de C.V.
Diagramación: Tania Bethsabé Castillo Aragón, Israel Morán Espíndola, Juan José Gómez Flores, Tania Berenice Campa González, Aída Paola Xospa Ramírez
Ilustraciones: Cristina Anguiano, Mauricio Ledesma
Fotografías: Glow Images Royalty Free, Stock.Xchange, Wikki Commons (Royalty Free)
Diseño de portada: Martha García, © Editorial Terracota S. A. de C.V.

Matemáticas 3

Puente de piedra 37
Col. Toriello Guerra • Tlalpan
14050, Ciudad de México
Tel.: (55) 5335 0090

ISBN: 978-607-713-151-9

Primera edición 2012
Séptima edición 2018

Impreso en México
Printed in Mexico

www.editorialterracota.com.mx

Esta obra se terminó de imprimir en mayo de 2017 en Litografía Magno Graf, S.A. de C.V., Calle E No. 6, Parque Industrial Puebla 2000, C.P. 72220, Puebla, Pue.

Presentación para el alumno

Estimado alumno:

El libro que tienes en tus manos es una obra diseñada especialmente para ayudarte en el estudio y aprendizaje de las matemáticas pensando en tu curiosidad y en la disposición para enfrentarte a nuevos retos. Para ello se han incluido actividades que te harán pensar, reflexionar, argumentar y comparar tus respuestas.

En esta obra se busca que puedas aprender por ti mismo, lo que no significa que debes aprender solo. Es muy importante que te involucres en las actividades que se te plantean y las compartas con tus compañeros; de esta manera estarás en posibilidades de darte cuenta de tus aciertos o errores, y buscar la manera de solucionarlos para continuar con el aprendizaje.

En este proceso equivocarse es normal porque así puedes analizar el porqué, y es cuando justamente se da el aprendizaje con sentido, es decir, cuando descubres cuál fue el error cometido y buscas la manera de corregirlo y superar los obstáculos. Para esto, es muy importante tu perseverancia en la resolución de cada problema, porque de esta forma tanto tú como tu profesor, podrán darse cuenta de cuáles son las dificultades que tienes y de esta manera él te apoyará para superarlas. Ésta es la mejor forma de que tu profesor obtenga información sobre tus ideas, concepciones, conocimientos, dificultades, etcétera. Sin embargo, no esperes que éste te proporcione la respuesta, él solamente te apoyará en el camino para encontrarla.

Los problemas o actividades que se plantean en cada lección están diseñados para que al utilizar los conocimientos que tienes, accedas a nuevos conocimientos cada vez más complejos. Por eso se te pide que resuelvas los problemas ya sea de manera individual, en pareja o en equipo, según se indica en cada uno de ellos.

Debes saber que confrontar tus procedimientos y respuestas con tus compañeros (siempre con atención y respeto) favorece tu aprendizaje, porque de ellos aprenderás lo que te puede ser útil y lo que no da resultado. De este modo se enriquecerán recíprocamente con diversos puntos de vista.

Al realizar las actividades planteadas en las lecciones tendrás la oportunidad de explorar el fascinante mundo de las matemáticas. Espero que esto te permita ver que las matemáticas son una forma interesante y útil de conocer la realidad y que están presentes en cualquier ámbito de la vida.

Te deseo que alcances el mayor de los éxitos.

La autora

Presentación para el profesor

Estimado profesor:

Estamos vislumbrando con mayor nitidez un horizonte alentador. Como educadores, nos toca la inquietante tarea de poner a disposición de todos y cada uno de los alumnos nuestras mejores herramientas de indagación, análisis, pensamiento y creación.

En el encuentro que se produce entre alumnos y docentes reside la posibilidad de la renovación, de descubrir nuevas interrogantes, de hacer replanteamientos y de oportunidades para cambiar el mundo en el que vivimos. La prioridad hoy es recuperar y consolidar la enseñanza como oportunidad de construir otro futuro.

Frente a este desafío y el de construir una sociedad más justa, las escuelas tienen encomendada una labor fundamental: formar nuevas generaciones que dominen las competencias necesarias para desenvolverse con éxito en un mundo cada vez más demandante.

Trabajar sólo resolviendo problemas, sin explicar o fundamentar "matemáticamente" es insuficiente. El trabajo que implica volver sobre lo realizado, por uno mismo o por los compañeros, exige siempre una explicitación, un reconocimiento y una sistematización del conocimiento que se pone en juego en la resolución de los problemas, en las formas de obtenerlo y de validarlo. Con este proceso, los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela (las nociones y las formas de trabajar en matemáticas) tendrán, a futuro, posibilidades de reutilización en diversos ámbitos y de evolución hacia nuevos conocimientos y el desarrollo de otras competencias.

En síntesis, "cómo" se hace matemáticas en el aula define, al mismo tiempo, "qué" matemáticas se hace, y "para qué" y "para quiénes" se enseña, lo que plantea una disyuntiva central en relación con la construcción de las condiciones que posibilitan el acceso a las matemáticas de unos pocos o de todos.

Por eso, en estas páginas volvemos sobre ciertos aspectos de la tarea de enseñar que seguramente no son nuevos, pero sí centrales para promover mejores aprendizajes. Preguntarse qué significa ser competente en matemáticas, qué se entiende por enseñar mediante la resolución de problemas y qué se concibe como problema; analizar cómo influye la gestión de la clase en el logro del aprendizaje por los alumnos; estar actualizado respecto de algunos avances en la tecnología que nos permite utilizar nuevas herramientas como internet y los programas informáticos para la enseñanza. Todo ello, nos ayudará a realizar una relectura de las prácticas habituales, a encontrar nuevos sentidos para lo que hacemos y a reinventar así nuestras propuestas.

Este libro de texto que usted tiene en sus manos fue pensado y diseñado para apoyarlo en su trabajo diario, para que juntos podamos mejorar la práctica de enseñar matemáticas en beneficio de nuestros estudiantes, quienes son el futuro de nuestro país.

La autora

Descripción de la propuesta

Fundamentación didáctica

En este material el planteamiento de la metodología didáctica sugerido para el estudio de las matemáticas es utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los hagan reflexionar, encontrar diferentes formas de resolverlas y formular argumentos que validen sus resultados. En este sentido, las lecciones están desglosadas en tres niveles: eje temático, tema y contenido. Cada lección se integra por una secuencia de situaciones problemáticas cuidadosamente seleccionadas que implican justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar.

La estructura didáctica de cada lección consta de tres grandes apartados:

Inicio

Se plantea una situación problemática que le permita al alumno reestructurar algo que ya sabe; en otras palabras, se articulan los conocimientos previos y los que se pretenden desarrollar.

Desarrollo

En esta parte se propone una secuencia de actividades didácticas que implican trabajo individual, en parejas y en equipos. Dentro del desarrollo de cada secuencia, el trabajo colaborativo ofrece a los alumnos la posibilidad de expresar sus ideas, enriquecerlas con las opiniones de los demás y generar en ellos habilidad para argumentar; además, de esta manera se facilita la puesta en común de los procedimientos que encuentran. Cabe aclarar que en las secuencias de actividades didácticas, existe una donde se incorpora el uso de la tecnología como una herramienta más para la construcción del conocimiento matemático en cuestión.

Cierre

Esta parte se compone de varios aspectos: conclusiones a partir de lo producido por los alumnos a fin de recapitular, sistematizar y ordenar en consenso grupal lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica; así como la generalización y aplicación de los conocimientos adquiridos para verificar el alcance de los contenidos. Además, se incluye una sección de coevaluación conformada de una rúbrica que permite evaluar aspectos actitudinales y de manejo de contenidos.

De esta manera, por un lado, se propicia que se construyan conocimientos y habilidades con sentido y significado y, por otro, que se adquieran actitudes y valores.
Con lo cual pretendemos ser coherentes con la definición de competencia como: "La capacidad de responder a diferentes situaciones e implica un saber hacer (habilidades) con saber (conocimiento), así como la valoración de las consecuencias de ese hacer (valores y actitudes)".

La evaluación

La presente obra propone una evaluación con un enfoque formativo, es decir, como un proceso que permita conocer la manera en que los alumnos van organizando, estructurando y usando sus aprendizajes en la resolución de problemas de distintos niveles de complejidad y de diversa índole.
Al evaluar debe considerarse la movilización de habilidades, valores y actitudes para tener éxito, puesto que éste es un proceso constante y gradual al que debe darse seguimiento y apoyo.
Por otro lado, con respecto a los aprendizajes esperados, al final de cada bloque se ha incorporado una prueba que tiene como objetivo determinar en qué medida los jóvenes son capaces de aplicar en ciertas situaciones los conocimientos y habilidades desarrollados.

Descripción de la propuesta

En este proceso no se debe obviar la evaluación del desarrollo de competencias. Debido a la diversidad de alumnos y de situaciones que se pueden presentar en un salón de clases, resultaría muy difícil dar sugerencias específicas para evaluar competencias; sin embargo, casi nunca es idóneo un examen escrito. El profesor puede valerse de otros recursos como plantear una tarea compleja y ver si el alumno llega a representársela, a involucrarse y conseguir solucionarla movilizando conocimientos.

Importancia del trabajo en equipo

La participación colaborativa y crítica resulta de la organización de actividades escolares colectivas en las que se requiere que los alumnos formulen, comuniquen, argumenten y muestren la validez de enunciados matemáticos, poniendo en práctica tanto las reglas matemáticas como socioculturales del debate, que los lleven a tomar las decisiones más adecuadas a cada situación.
Es importante que insista en que cada integrante asuma la responsabilidad de la tarea que se trata de resolver, no de manera individual sino colectiva. Por ejemplo, si la tarea consiste en resolver un problema, cualquier miembro del equipo debe estar en posibilidad de explicar el procedimiento que utilizó.
Sabemos que la coevaluación entre los alumnos es un proceso que les permite aprender a valorar los procesos y actuaciones de sus compañeros, con la responsabilidad que esto conlleva, además de que representa una oportunidad para compartir estrategias de aprendizaje y de este modo aprender juntos.
Lo anterior es posible con la estructura didáctica que se propone en este libro, ya que las actividades que se plantean incentivan la interacción entre los estudiantes, la cual permite valorar el desempeño de los compañeros, con la finalidad de retroalimentarse y de reflexionar de manera conjunta.

Índice

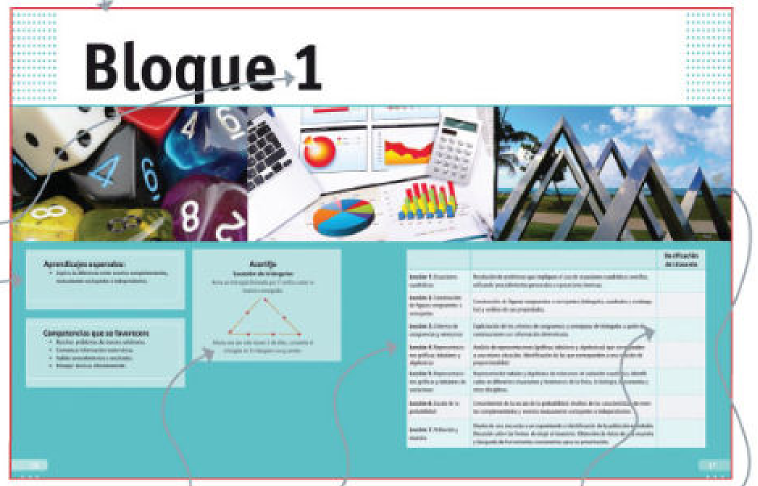
Índice

Índice

Cómo usar este libro

Entrada de bloque

Contiene los aprendizajes esperados y la lista de lecciones desarrolladas en el bloque.



Número de bloque.

Aprendizajes esperados y competencias que se favorecen.

Acertijo matemático que te invita a poner a prueba tus conocimientos.

Lista de lecciones y contenidos.

Columna para la dosificación del docente.

Imágenes relacionadas con los contenidos del bloque.

Lecciones

Número y título de lección.

Contenidos a desarrollar.

Explor@

Actividades para recuperar los conocimientos previos.

Nexos

Se hace referencia a los contenidos de lecciones, grados anteriores y otras asignaturas escolares que se relacionan con el contenido de la lección en estudio.

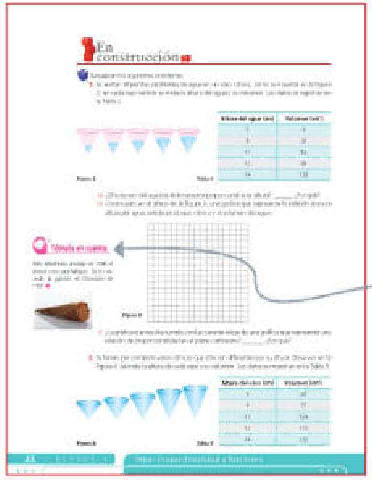
Cómo usar este libro

En construcción
Actividades individuales y en equipo que permitan desarrollar de manera gradual y suficiente los contenidos.

Modalidades de trabajo

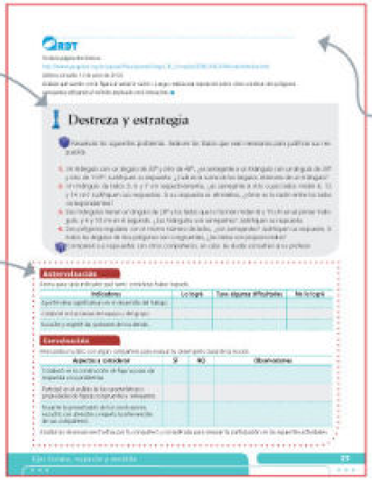
- Individual
- Pareja
- Equipo
- Grupo

Glosario
Incluye el significado de alguna palabra desconocida.



En la cima
Cierre de lección donde se obtienen conclusiones a partir de lo producido en los diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica.

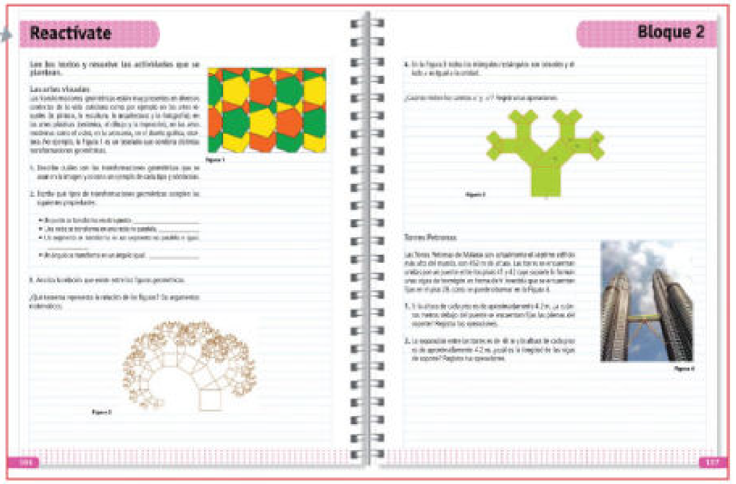
Tómalo en cuenta
Información adicional sobre temas de interés.



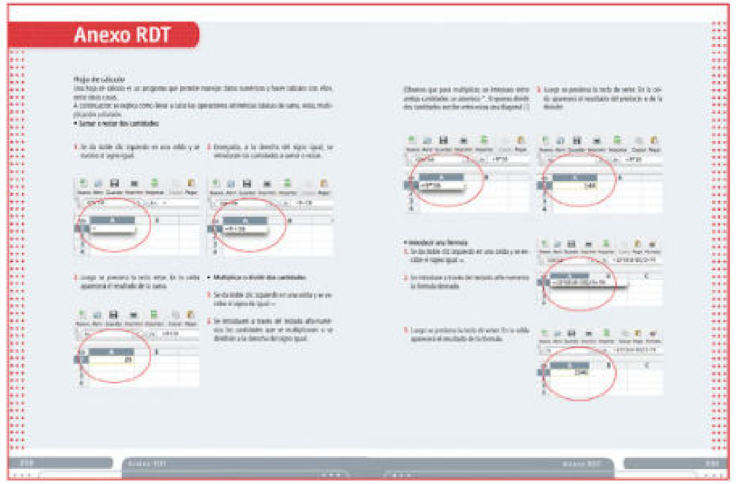
Destreza y estrategia
Las actividades de esta sección servirán para consolidar el aprendizaje de la lección.

Autoevaluación y Coevaluación
Reconoce saberes y responsabilidades en el proceso de aprendizaje.

RDT (Recursos Digitales para Todos)
Actividades complementarias con el uso de la calculadora, hoja de cálculo y demás herramientas tecnológicas, como páginas de internet interactivas, auxiliares en el tratamiento de los contenidos.



Reactívate
Evaluación formato tipo PISA que ofrece la oportunidad de verificar el alcance de los aprendizajes esperados.



Anexo RDT
Breve explicación acerca de cómo utilizar una hoja de cálculo.

Bibliografía
Contiene los libros y sitios de Internet consultados y sugeridos para el alumno y el profesor.

Bloque 1

Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

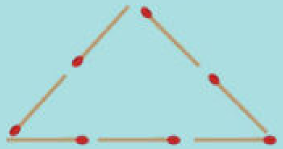
Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Acertijo

Sucesión de triángulos

Arma un triángulo formado por 7 cerillos como se muestra enseguida.



Ahora, con tan sólo mover 3 de ellos, convierte el triángulo en 3 triángulos congruentes.

		Dosificación del docente
Lección 1. Ecuaciones cuadráticas	Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.	
Lección 2. Construcción de figuras	Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.	
Lección 3. Criterios de triángulos	Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.	
Lección 4. Representaciones gráficas, tabulares y algebraicas	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.	
Lección 5. Representaciones gráficas y tabulares de variaciones	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.	
Lección 6. Escala de la probabilidad	Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.	
Lección 7. Población y muestra	Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.	

Lección 1
Ecuaciones cuadráticas

Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Explor@

Roberto propuso los siguientes acertijos a sus compañeros:

Héctor
El cuadrado de un número es 144. ¿Cuál es ese número?

Diego
El cuadrado de un número menos 5 es igual a 220. ¿Cuál es ese número?

Aurora
El cuadrado de un número más el mismo número es igual a 306. ¿Cuál es ese número?

Encuentra las soluciones de los acertijos propuestos por Roberto.

Al terminar, reúnete con un compañero y comprueba tus resultados; si no coinciden, verifiquen por qué. Argumenten los procedimientos empleados para su resolución.

Nexos

En primero y en segundo grados resolviste problemas que implicaban el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado o sistemas de ecuaciones; para resolver una ecuación, aplicaste las propiedades de la igualdad y finalmente, la transposición de términos. Revisa tus apuntes de grados anteriores para recordar estas propiedades.

En construcción

1. Resuelvan los siguientes problemas:
¿Qué números deben ir en los recuadros para que las igualdades se cumplan?

a) $\square^2 = 100$ b) $\square^2 + 1 = 50$ c) $\square^2 - 1 = 80$

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros, comenten el procedimiento que siguieron para hallar los números que van en los recuadros.

2. Diego propuso como solución de la primera ecuación lo siguiente:

$\boxed{-10}^2 = 100$

¿Están de acuerdo con la respuesta de Diego? Justifiquen su respuesta.
En el caso de la ecuación $\square^2 + 1 = 50$, ¿existe un número negativo que satisfaga la igualdad? Justifiquen su respuesta.

Aurora afirma que en las tres ecuaciones anteriores existen dos números que satisfacen a cada ecuación. ¿Están de acuerdo con esta afirmación?________ ¿Por qué?

Analicen el procedimiento y los resultados de Diego sobre la segunda ecuación:

Sustituí el recuadro por una literal, ya que no se sabe qué valor le corresponde en la ecuación, y lo que hice fue despejar de la siguiente manera:

$$x^2 + 1 = 50$$
$$x^2 + 1 - 1 = 50 - 1$$
$$x^2 = 49$$

De este modo obtuve que el cuadrado del número desconocido es igual a 49
Posteriormente pensé qué número elevado al cuadrado me da 49. Hallé que las soluciones de la ecuación son $x = 7$ *y* $x = -7$.

Después de analizar tanto el procedimiento como los resultados de Diego, respondan:

a) ¿Realizaron un procedimiento semejante al de Diego? Justifiquen su respuesta.
____
b) ¿Qué pueden concluir respecto al número de soluciones que tiene una ecuación en la que la incógnita está elevada al cuadrado?________________
c) Retomen los acertijos propuestos al inicio de la lección. Formulen las ecuaciones que los representan y resuélvanlas para comprobar los resultados obtenidos anteriormente. Representen con una literal la incógnita en cada caso.
d) ¿Cambiaron sus respuestas? Justifiquen.________________
____

Comenten con sus compañeros sus respuestas y sus procedimientos de resolución; luego discutan si es cierto que al elevar al cuadrado un número cualquiera —positivo o negativo— el resultado siempre es positivo. Escriban las conclusiones en su cuaderno.

A una igualdad que contiene una variable elevada al cuadrado, por ejemplo: $x^2 = 36$, se le llama **ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática.** En otras palabras, es toda ecuación en la cual el mayor exponente de la variable es 2.

3. Escriban una ecuación que permita resolver los siguientes acertijos.

a) Pensé un número y lo elevé al cuadrado; al resultado le sumé 6 y me dio 150. ¿Qué número pensé? ___________________________

b) Pensé un número y lo elevé al cuadrado; al resultado lo multipliqué por 4 y al final obtuve 400. ¿Qué número pensé? ___________________________

c) ¿Qué pueden concluir respecto al número de soluciones que tiene una ecuación en la que la incógnita está elevada al cuadrado?

- Compara las ecuaciones que escribiste con las obtenidas por otros compañeros y comprueben que sean correctas. Expliquen cómo dedujeron cada una.
- ¿Son cuadráticas las ecuaciones que escribieron? ¿Por qué? Resuelvan las ecuaciones y verifiquen que los valores obtenidos satisfagan los problemas planteados.
- Para el acertijo del inciso a el número que se pensó puede ser: __________ o __________.
- Para el acertijo del inciso b el número que se pensó puede ser: __________ o __________.

Comparen sus respuestas de manera grupal. Verifiquen que hayan planteado las mismas ecuaciones, por ejemplo, si para el caso del inciso a, escribieron una ecuación como la siguiente: $x^2 + 6 = 150$. Soliciten la ayuda de su profesor en caso de dificultades.

4. Completen la ecuación que resuelva cada uno de los siguientes problemas y encuentren la solución.

a) El cuadrado de un número es igual al triple del mismo. ¿De qué número se trata?
$(\quad)^2 = 3x$

b) El cuadrado de un número menos el doble del mismo número es igual a 48. ¿Cuál es ese número? $(\quad)^2 - 2(\quad) = 48$

c) El cuadrado de un número es igual a la tercera parte del mismo más 8. ¿Cuál es ese número? $x^2 = \frac{(\quad)}{3} + 8$

Comparen sus resultados con los de otros equipos. En caso de que no coincidan, verifiquen su ecuación y comprueben si sus respuestas cumplen con las condiciones de los problemas. Si tienen alguna duda, pidan ayuda a su profesor y pónganla a consideración de todo el grupo.

5. Redacten un problema que se pueda resolver con cada una de las siguientes ecuaciones.

$x^2 = 225$	
$2x^2 = 100$	
$x(x+4) = 45$	
$x^2 - 2x = 8$	

Reúnanse con sus compañeros y comparen sus resultados. Discutan cómo fue que obtuvieron cada uno de ellos. En caso de alguna duda, consulten a su profesor.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica:
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mapas_contenido/mat/mat3_b2.php (última consulta: 17 de noviembre de 2013)
2. Accede al interactivo que corresponde a la sesión 8.3 Menú de problemas.
3. Realiza un resumen de la información contenida y preséntala ante tu grupo.
4. Visita la dirección electrónica http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0161-02/ed99-0161-02.html (última consulta: 11 de febrero de 2013). En esta dirección se explica que existen tres tipos de ecuaciones de segundo grado.

Tipo	Forma	Ejemplos
Completa	$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + 3x - 4 = 0$
Incompleta cuando b = 0	$ax^2 + c = 0$	$2x^2 - 32 = 0$
Incompleta cuando c = 0	$ax^2 + bx = 0$	$x^2 + 3x = 0$

Tabla 1

En la parte final de la página aparece una calculadora electrónica como se muestra enseguida:

Utiliza la calculadora electrónica y resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas. No olvides verificar tus respuestas.

a) $2x^2 - 8 = 0$ c) $4x^2 - 9 = 0$ e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - x = 0$ d) $x^2 - 4x = 0$ f) $x^2 + x - 12 = 0$

Comenta con tus compañeros y profesor lo que aprendiste al leer la información contenida en la página electrónica.

En la cima

Resuelve los siguientes problemas:

1. En un terreno de forma cuadrada, como se modela en la Figura 1, se ha fincado una parte de 40 m por lado; mientras que el resto es un jardín de 2 000 m². ¿Cuál es la medida por lado de todo el terreno?

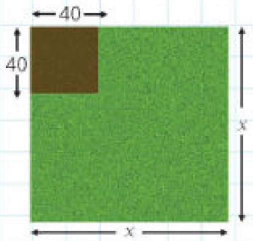


Figura 1

a) ¿Cúal es la expresión algebraica que representa el área de todo el terreno?
b) ¿Cuál es el área de la parte fincada?
c) Escriban una ecuación que represente la siguiente información:
"El área de todo el terreno menos el área de la parte fincada es igual a dos milmetros cuadrados
d) Resuelvan la ecuación y den respuesta al problema.

2. A una pieza de cartón de forma cuadrada, se le recortan cuadrados en las esquinas para hacer una caja sin tapa, con las siguientes medidas: altura = 5 cm; volumen = 500 cm³. Observa la Figura 2. Calcula la medida por lado del cartón que se necesita para hacer la caja.

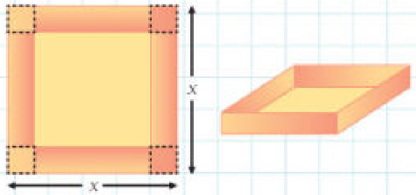


Figura 2

a) ¿La expresión algebraica que representa la medida por lado de la caja es x-10? Justifiquen su respuesta.
b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la base de la caja?
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de la caja?
d) Resuelvan la ecuación y den respuesta al problema.

3. Una lámina triangular, como la Figura 3, tiene un área de 24 m² y una altura de 2 m más que la base correspondiente. ¿Cuánto mide la altura?

Figura 3

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del trángulo?
b) ¿Qué representa la siguiente ecuación $x^2 + 2x = 24$?
c) Resuelvan la ecuación y encuentren la medida de la altura del triángulo.

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas; en caso de que no coincidan, verifiquen sus procedimientos. Por ejemplo, para el problema 2, ¿plantearon la ecuación $5(x-10)^2=500$? Si tienen alguna duda que no puedan aclarar, pidan ayuda a su profesor.

En su cuaderno escriban, a manera de resumen, las conclusiones acerca de las características de las ecuaciones de segundo grado que analizaron en esta lección.

Destreza y estrategia

Realiza lo que se pide a continuación. Si consideras necesario, utiliza tu calculadora.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 - 4 = 0$
   b) $(x - 5)^2 = 100$
   c) $2x^2 - 8 = 0$
   d) $x^2 + 2x = 35$

2. Asocia a cada problema la ecuación que la modela:

Problema	Observaciones
( ) El largo de un rectángulo mide tres unidades más que el ancho, y el área es 270 m², ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?	**A.** $a^2 + a = 270$ **B.** $n^2 - n = 96$ **C.** $x(x + 3) = 270$ **D.** $a^2 + 4a = 96$ **E.** $x^2 + x = 210$ **F.** $(x + x)^2 = 210$
( ) La edad de Blanca es tal que sumada a su cuadrado da 210 años. ¿Cuántos años tiene Blanca?	
( ) La suma del área de un cuadrado más su perímetro es 96. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?	
( ) El producto de dos números es 270. Si uno es tres unidades mayor que el otro, ¿cuáles son los números?	
( ) Juan es tres años mayor que su hermano Luis. Si el producto de sus edades es 270, ¿qué edad tiene cada uno?	

Compara tus resultados con los de otros compañeros, acudan a su profesor en caso de dudas o dificultades.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Cooperé en las dudas o aportes para mejorar el aprendizaje.			
Escuché y respeté las opiniones de los demás			
Traté con respeto a mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	Sí	NO	Observaciones
Realizó cálculos de ensayo y error para resolver las ecuaciones de segundo grado.			
Analizó que una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones.			
Planteó correctamente ecuaciones a partir de las situaciones propuestas y viceversa.			
Argumentó sus respuestas y escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 2
Construcción de figuras

Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en grados anteriores, por ejemplo: trazo de triángulos y cuadriláteros, análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones, construcción de figuras simétricas respecto de un eje, etcétera; te serán de utilidad para analizar propiedades de figuras congruentes y semejantes.

Explor@

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. Valeria, Rodrigo y Pamela están dibujando triángulos: los trazos de Valeria corresponden a la Figura 1, los trazos de Rodrigo a la Figura 2, mientras que a los trazos de Pamela les corresponde la Figura 3.

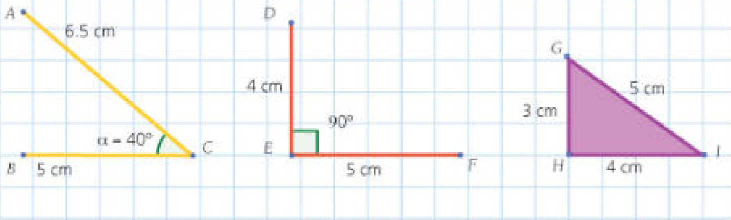


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuáles serán las medidas de los lados y de los ángulos de cada triángulo que dibujen?

b) Construye los tres triángulos con las medidas reales que se indican en cada figura y escribe las medidas que hacen falta en la Tabla 1. Usa tus instrumentos geométricos.

Triángulo *ABC*	Triángulo *DEF*	Triángulo *GHI*
$\overline{AB}$=	$\overline{DE}$=	$\overline{GH}$=
$\overline{BC}$=	$\overline{EF}$=	$\overline{HI}$=
$\overline{AC}$=	$\overline{DF}$=	$\overline{GI}$=
∠*BAC*=	∠*FDE*=	∠ *IGH*=
∠*ABC*=	∠*DEF*=	∠*GHI*=
∠*BCA*=	∠*EFD*=	∠*HIG*=

Tabla 1

Reúnete con dos compañeros y comparen sus trazos y respuestas. Luego, respondan lo siguiente:

- ¿Coincidieron en sus medidas?
- ¿Los triángulos *ABC* que dibujaron son iguales entre sí? ¿Por qué?
- ¿Y los triángulos *DEF* son iguales?
- ¿Es posible dibujar dos triángulos que tengan sus tres ángulos iguales, pero diferentes medidas de lados?
- ¿Es posible dibujar dos triángulos que tengan sus tres lados iguales y diferentes ángulos?

Con el apoyo de su profesor, a partir de las preguntas anteriores, establezcan conclusiones y escríbanlas en su cuaderno.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas. Las figuras no representan las medidas reales que se indican. Utilicen sus instrumentos geométricos para sus construcciones.

1. ¿Cuánto medirá la altura de un rectángulo que tenga las medidas que se muestran en la Figura 4? Justifiquen su respuesta.

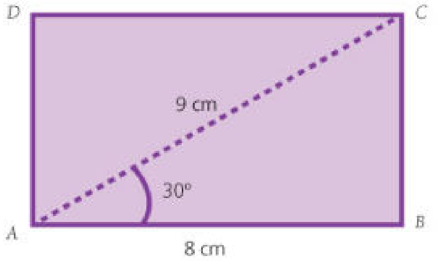


Figura 4

a) ¿Cómo determinaron la medida del segmento *BC*?
b) Comparen con otras parejas, ¿coincidieron sus medidas? Justifiquen sus respuestas.
c) Consideren los triángulos *ABC* y *ACD*, midan sus lados, ¿cómo son entre sí?
d) Midan sus ángulos, ¿qué pueden concluir? ______________________
e) Analicen la siguiente información y luego contesten:

Dos segmentos de recta o ángulos son **congruentes** si tienen la misma medida.
El símbolo que se utiliza para expresar congruencia es ≅

f) ¿Los triángulos *ABC* y *ACD* son congruentes? ¿Por qué?
g) Escriban los ángulos que son congruentes con los siguientes:

∠*CAB* ≅ ________ ∠*ADC* ≅ ∠ ________ ∠*ACB* ≅ ∠ ________

2. ¿Cuánto mide por lado un rombo cuyas diagonales tienen las medidas que se indican en la Figura 5? Justifiquen sus respuestas.

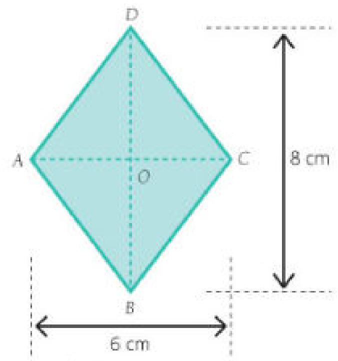


Figura 5

a) Completen las siguientes afirmaciones:

$\angle DAB \cong \angle$ ______ $\qquad \angle ADB \cong \angle$ ______

$\Delta ABC \cong \Delta$ ______ $\qquad \Delta ABD \cong \Delta$ ______

$\overline{AC} \cong$ ______ $\qquad \overline{DO} \cong$ ______

b) ¿Cuánto mide la base del triángulo DOC? ________ ¿Y su altura? ____________

c) ¿Qué tipo de trazos hicieron para determinar la medida de un lado del rombo de la Figura 5?

3. A partir de la siguiente información y los trazos de la Figura 6, construyan un trapecio rectángulo cuya base mayor mida 10 cm y su base menor 4 cm. Luego, respondan lo que se cuestiona.

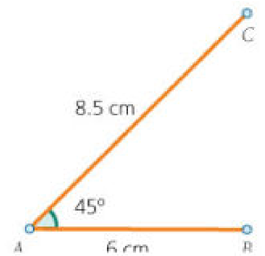


Figura 6

a) ¿Cuántos centímetros mide la altura del trapecio que construyeron?

b) ¿Consideran que el trapecio que construyeron es congruente con los otros trapecios que construyeron sus compañeros? ¿Por qué?

c) Si se cambia de medida el ángulo *CAB*, ¿qué es lo que cambiaría en el trapecio rectángulo?

Reúnete con tus compañeros y comparen sus trazos y respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas, así como de sus procedimientos y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Finalmente, escriban una conclusión sobre qué condiciones deben cumplir dos figuras para que sean congruentes.

En equipos de 5 integrantes, realicen lo que se pide.

4. Midan los lados de cada uno de los polígonos de la Figura 7 y luego respondan lo que se pregunta.

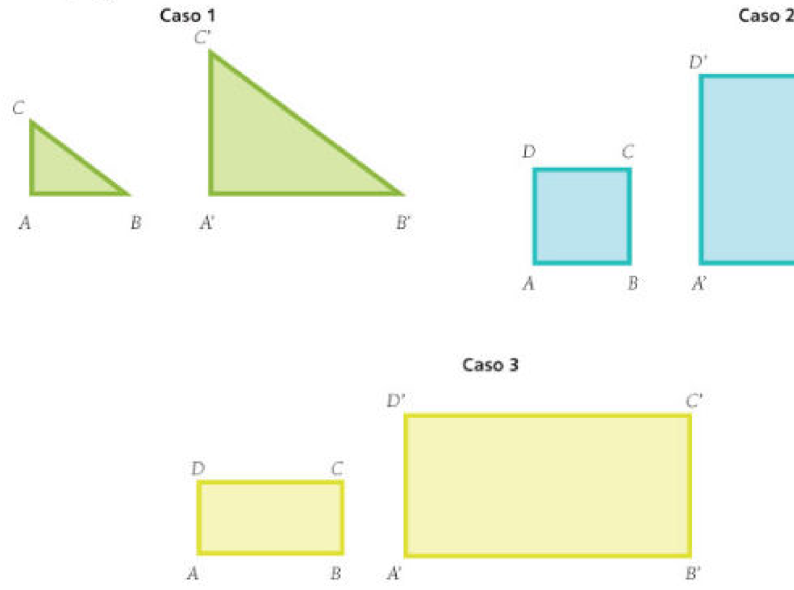


Figura 7

a) ¿La medida de cualquier lado de la segunda figura es el doble de su correspondiente en la primera figura? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Los ángulos correspondientes son congruentes? Justifiquen su respuesta.

c) ¿Los lados correspondientes de cada caso son proporcionales? Averígüenlo para el caso 2 ó 3.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \qquad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \qquad \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \qquad \frac{\overline{A'D'}}{\overline{AD}} =$$

d) ¿Cuál es la **razón de proporcionalidad o semejanza** de cada caso?

e) ¿Cuál es la relación entre la razón de semejanza y la razón de las áreas?

f) ¿Cuál es la relación entre la razón de semejanza y la razón del perímetro?

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego discutan cómo son entre sí la razón de los perímetros de dos polígonos semejantes y la razón de semejanza. Asimismo, establezcan la relación entre la razón de las áreas de dos polígonos semejantes y la razón de semejanza. Finalmente, escriban una conclusión sobre qué condiciones deben cumplir dos figuras para que sean semejantes.

g **razón de semejanza.** Se llama razón de semejanza (escala) al cociente entre dos longitudes correspondientes.

En la cima

Reúnete con algún compañero y respondan los siguientes planteamientos:

1. Analicen los pentágonos de la Figura 8 y respondan lo que se pregunta.

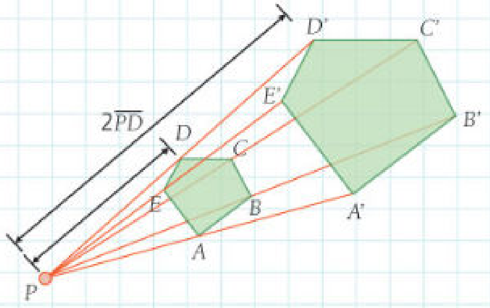


Figura 8

a) ¿Cuánto mide el segmento *PD*? __________ ¿Y el segmento *PD'*? __________

b) ¿El segmento *AB* es paralelo al segmento *A'B'*? ¿Y cuál es el segmento paralelo al segmento *AE*?

c) ¿El polígono *A'B'C'D'E'* es semejante al polígono *ABCDE*? Justifiquen su respuesta.

d) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los dos polígonos?

e) ¿Cuál es la razón de semejanza si la distancia *PA'* es igual a 3 veces la distancia *PA*?

2. Construyan una figura semejante al polígono *ABCD* de la Figura 9, de tal forma que la razón de semejanza sea 1.5.

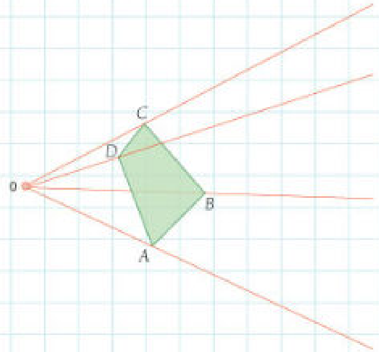


Figura 9

Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas y sus construcciones. Comenten cómo fue que construyeron la figura semejante, por ejemplo, ¿qué tomaron en cuenta para ubicar el vértice *A*.

RDT

Visita la página electrónica:
http://www.geogebra.org/en/upload/files/spanish/Angel_M_Gonzalez/SEMEJANZA/Metododethales.html
(última consulta: 13 de junio de 2013).
Analiza qué sucede con la figura al variar la razón r. Luego, realiza una exposición sobre cómo construir dos polígonos semejantes utilizando el método empleado en el interactivo.

Destreza y estrategia

Resuelvan los siguientes problemas. Realicen los trazos que sean necesarios para justificar sus respuestas.

1. Un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 40°, ¿es semejante a un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 110°? Justifiquen su respuesta. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un triángulo?
2. Un triángulo de lados 3, 6 y 7 cm respectivamente, ¿es semejante a otro cuyos lados miden 6, 12 y 14 cm? Justifiquen sus respuestas. Si su respuesta es afirmativa, ¿cómo es la razón entre los lados correspondientes?
3. Dos triángulos tienen un ángulo de 20° y los lados que lo forman miden 6 y 15 cm en el primer triángulo, y 4 y 10 cm en el segundo. ¿Los triángulos son semejantes? Justifiquen su respuesta.
4. Dos polígonos regulares con el mismo número de lados, ¿son semejantes? Justifiquen su respuesta. Si todos los ángulos de dos polígonos son congruentes, ¿los lados son proporcionales?

Comparen sus respuestas con otros compañeros; en caso de dudas consulten a su profesor.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Aporté ideas significativas en el desarrollo del trabajo.			
Colaboré en las tareas del equipo y del grupo			
Escuché y respeté las opiniones de los demás.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la construcción de figuras para dar respuesta a los problemas.			
Participó en el análisis de las características o propiedades de figuras congruentes y semejantes.			
Durante la presentación de los conclusiones, escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 3
Criterios de triángulos

Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada.

Explor@

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. El papá de Valeria es herrero y está armando una estructura metálica triangular con dos piezas de guía y un ángulo entre ellas tal como se muestra en la Figura 1.

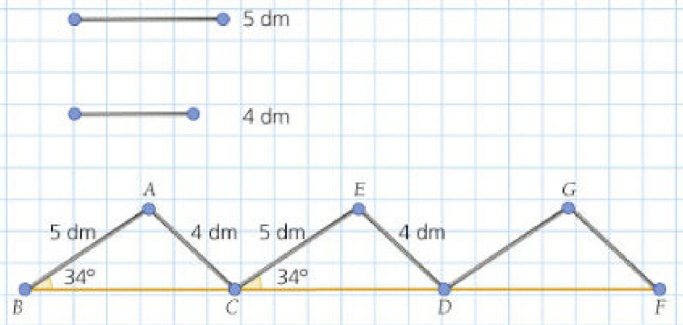


Figura 1

a) ¿Los triángulos que se forman son congruentes? ¿Por qué?
b) Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre los dos lados también es congruente, entonces ¿los triángulos son congruentes?
c) ¿Cuáles son las condiciones mínimas que deben reunir dos o más triángulos para que sean congruentes?

En el grupo de Valeria están construyendo triángulos congruentes y su maestra les planteó la misma pregunta anterior. Valeria y algunos de sus compañeros respondieron lo siguiente:

Valeria: Que tengan sus tres lados congruentes.
Diego: Que tengan dos lados congruentes y el ángulo congruente entre estos lados.
Rodrigo: Que tengan sus tres ángulos congruentes.
Pamela: Que tengan dos lados congruentes.
Jimena: Que tengan dos ángulos congruentes y un lado congruente.

d) ¿Cuáles consideras que deben ser las condiciones mínimas que deben reunir dos o más triángulos para que sean congruentes? Escribe tu conjetura.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, respondan lo siguiente: ¿Para que dos triángulos sean congruentes, es suficiente que sólo algunos lados o ángulos sean iguales? Argumenten.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en grados anteriores (por ejemplo, análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones de triángulos) y en la lección 2 de este libro sobre construcción de figuras congruentes o semejantes y análisis de sus propiedades, te serán de utilidad para desarrollar con éxito la presente lección.

Relaciónalo con...

Diversidad cultural. Respetar a las personas incluye el derecho a tener opiniones diferentes.

En construcción

Realiza la siguiente actividad. Utiliza los instrumentos geométricos para tus construcciones.

1. En una hoja blanca construye un triángulo cuyos lados sean las medidas de los segmentos de la Figura 2.

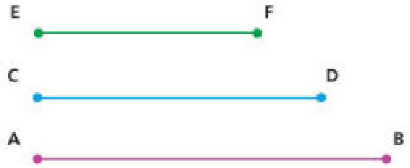


Figura 2

Recorta el triángulo que construiste y compáralo con los de otros compañeros; respondan las siguientes preguntas:

a) ¿Todos los triángulos trazados son congruentes? ¿Por qué?
b) ¿Es suficiente con tener como información las medidas de los tres lados de un triángulo para reproducir triángulos congruentes? Argumenten sus respuestas.
c) Escriban una conclusión en su cuaderno respecto a las características de los triángulos que se generan a partir de las medidas de sus tres lados.

2. Reúnete con un compañero y cada quien construya en una hoja blanca un triángulo cuyos lados tengan las medidas de los segmentos de la Figura 3 y que entre estos haya un ángulo de 75°.

Figura 3

Recorten el triángulo y compárenlo con el de otros compañeros. ¿Los triángulos trazados son congruentes? ¿Por qué? ______

3. Dibujen otro triángulo con los mismos segmentos pero que el ángulo entre ellos sea de 90°.
   a) ¿Este triángulo es congruente con el triángulo trazado anteriormente? ¿Por qué?
   b) ¿Es suficiente con tener como información las medidas de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos para reproducir triángulos congruentes? Indaguen con los triángulos del resto de sus compañeros de grupo.
   c) Escriban en su cuaderno una conclusión respecto a las características de los triángulos que se generan a partir de las medidas de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos.

4. Cada uno construya en una hoja blanca un triángulo con el segmento AB y los ángulos que se indican en la Figura 4. Al terminar, recórtenlo y compárenlos con los de otras parejas.

Figura 4

$\angle A = 35°$ $\angle B = 45°$

   a) ¿Los dos triángulos trazados son congruentes? ¿Por qué?
   b) Si los ángulos cambian de lugar de manera que el $\angle A = 45°$ y $\angle B = 35°$, ¿el triángulo que resulta es semejante o congruente con el triángulo anterior? ¿Por qué?
   c) Escriban en su cuaderno una conclusión respecto a las características de los triángulos que se generan a partir de las medidas de dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos.

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus conclusiones y lleguen a un consenso general. Posteriormente, discutan sobre cuántos elementos son necesarios para establecer establecer la congruencia, en qué orden y si éstos deben ser al menos un lado o un ángulo. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

5. Analicen la siguiente información y compárenla con las conclusiones que escribieron anteriormente.

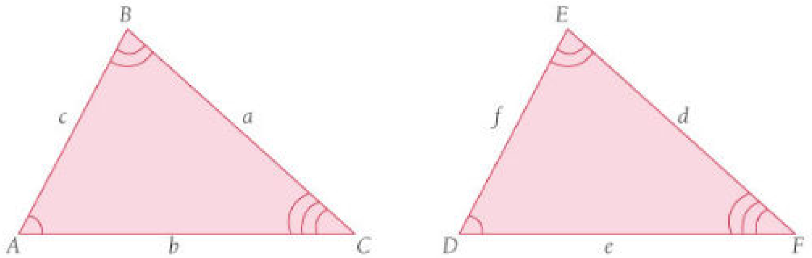


Figura 5

Dos triángulos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes. Los triángulos ABC y DEF de la Figura 5 son congruentes, lo cual se denota como:

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Para determinar la congruencia de dos triángulos es necesario establecer la congruencia de tres elementos, los cuales deben estar en un orden determinado y por lo menos uno de ellos tiene que ser un lado.

Criterio LAL (lado-ángulo-lado)
Dos triángulos son congruentes si dos lados correspondientes y el ángulo determinado por ellos son respectivamente congruentes.
Criterio ALA (ángulo-lado-ángulo)
Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado común a ellos, son respectivamente congruentes.
Criterio LLL (lado-lado-lado)
Dos triángulos son congruentes si sus tres lados correspondientes son congruentes, respectivamente.

   a) ¿Coinciden los criterios de congruencia con las conclusiones a la que ustedes llegaron?
   b) ¿Están de acuerdo en que para determinar la congruencia de dos triángulos sólo es necesario establecer la congruencia de tres elementos? Argumenten sus respuestas.

Realicen lo que se indica a continuación. Utilicen sus instrumentos geométricos.

6. Cada integrante del equipo trace en una hoja blanca un triángulo equilátero y un triángulo escaleno (los ángulos de este último deben medir 70°, 50° y 60°). Luego, respondan lo siguiente:
   a) ¿Los triángulos equiláteros que trazaron son del mismo tamaño?
   b) ¿Los triángulos equiláteros tienen la misma forma?
   c) ¿Los triángulos escalenos que trazaron son del mismo tamaño? ¿Por qué?
   d) ¿Los triángulos escalenos tienen la misma forma?

Tomen dos triángulos cualesquiera de los que construyeron, identifiquen los lados correspondientes y márquenlos como se indica en la Figura 6. Después, calculen las razones entre las longitudes de sus lados.

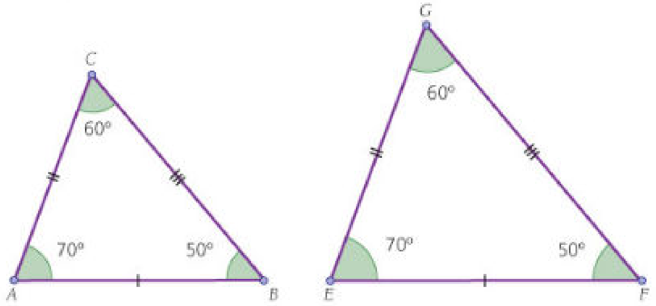


Figura 6

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{EF}} =$ $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{FG}} =$ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{EG}} =$

   e) ¿Cuál es la razón entre los lados correspondientes de los triángulos que trazaron?
   f) ¿Cómo son las medidas de sus ángulos?
   g) ¿Dos triángulos son semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales?

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas a las preguntas anteriores y lleguen a un consenso general. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

En la cima

1. Realicen una discusión grupal acerca de los siguientes aspectos:
   a) Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de un segundo triángulo, entonces, ¿los triángulos son semejantes? Argumenten.

   b) Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro, entonces, ¿los triángulos son semejantes? Justifiquen.

   c) Si en dos triángulos las razones de dos pares de lados correspondientes son iguales y los ángulos que estos lados determinan son congruentes, entonces, ¿los triángulos son semejantes? Justifiquen su respuesta.

2. Analicen la siguiente información y compárenla con las conclusiones a las que llegaron anteriormente.

Dos triángulos son **semejantes** si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo:
El triángulo ABC es semejante al triángulo DEF, lo cual se escribe como:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

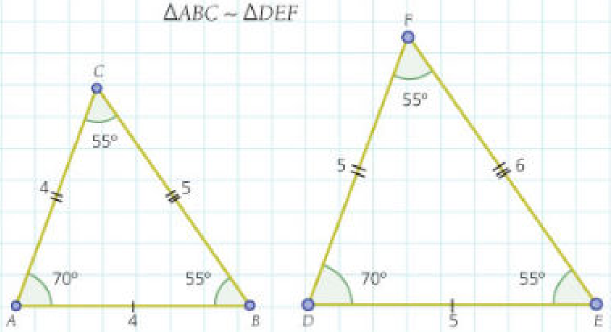


Figura 7

Esto significa que:

$$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E,\ \angle C \cong \angle F$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = K$$

La constante K se denomina **razón de semejanza**.

Para determinar si dos triángulos son semejantes, los criterios son los siguientes:
Criterio LLL (Lado, Lado, Lado): Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

Criterio AA (Ángulo, Ángulo): Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro, entonces los triángulos son semejantes.

Criterio LAL (Lado, Ángulo, Lado): Si en dos triángulos las razones de dos pares de lados correspondientes son iguales y los ángulos que estos lados determinan son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

a) ¿Coinciden los criterios de semejanza con las conclusiones a las que ustedes llegaron?
b) Realicen las adecuaciones que consideren necesarias en sus conclusiones.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/hdt/materiales-educativos-digitales/ (última consulta: 17 de noviembre de 2013)
2. Accede a la liga "ver" de 3° de Secundaria, Matemáticas III, Bloque 2 que corresponde al siguiente aprendizaje esperado y realiza lo que se indica:

   Determinar los criterios de semejanza de triángulos. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en el análisis de diferentes propiedades de los polígonos. Aplicar la semejanza de triángulos en el cálculo de distancias o alturas inaccesibles.
3. Realiza un resumen de la información contenida y preséntala ante tu grupo.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas geométricos.

1. En cada uno de los siguientes casos, determina si es posible dibujar triángulos semejantes. Argumenta tus respuestas.
   a) Dos de los lados de un triángulo miden 5 cm y el tercer lado 4 cm; los lados del triángulo correspondiente miden 3.75 y 3 cm.
   b) Los lados de uno de los triángulos miden 4, 6 y 8 cm, y sus correspondientes en el otro triángulo miden 2, 3 y 4 cm.
   c) En un triángulo, uno de sus lados mide 6 cm y uno de sus ángulos 70°; en el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 4.5 cm y 70°, respectivamente.
   d) Dos lados de un triángulo miden 4 cm y el tercero 5 cm; el ángulo comprendido entre los primeros mide 68°. En el segundo triángulo los lados correspondientes miden 8, 9 y 10 cm y el ángulo correspondiente se conserva.
   e) Los tres ángulos de cada uno de los dos triángulos miden 40°, 64° y 76° y sus lados son proporcionales.

2. Señala las partes que faltan para que cada par de triángulos de la Figura 8 sean congruentes. Anota el criterio que se está aplicando.

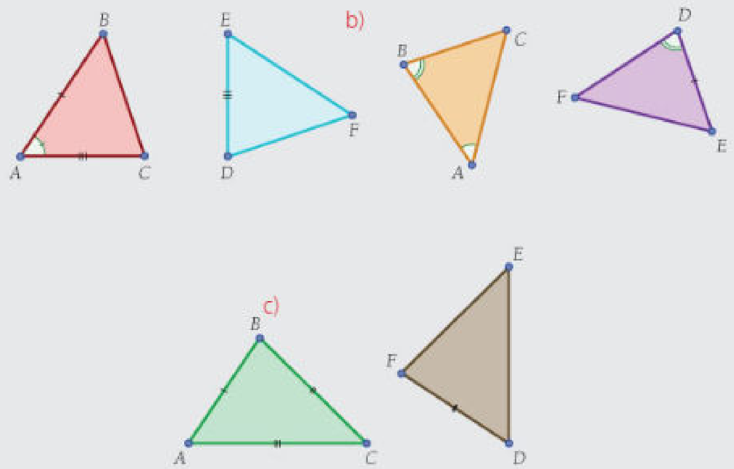


Figura 8

Compara tus resultados con otras parejas y discute con tus compañeros la manera como pueden emplear en la resolución de problemas, las relaciones entre las medidas de los ángulos en triángulos, paralelogramos y rectas paralelas cortadas por una secante.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Mostré una actitud crítica en el desarrollo del trabajo en equipo.			
Mostré una actitud de respeto hacia las ideas de los compañeros.			
Realicé las tareas responsablemente.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la construcción de triángulos para determinar los criterios de congruencia y semejanza.			
Analizó las características de dos triángulos congruentes y semejantes.			
Participó en la discusión de respuestas y conclusiones y escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 4
Representaciones gráficas, tabulares y algebraicas

Explora

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un **videoproyector** recibe una señal de video y proyecta una pantalla rectangular según la distancia a la que se coloque de la pared de proyección, como se muestra en la Figura 1. Observa el esquema y completa la Tabla 1 que relaciona la altura de cada pantalla con su base.

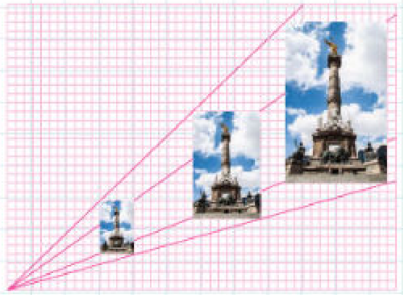


Figura 1

Rectángulo	Base	Altura
1		
2		
3		
4	20 u	
5		60 u
6	72 u	
7	120 u	
8		120 u
9	300 u	

Tabla 1

a) ¿Existe una relación proporcional entre las medidas de las bases y las alturas de las pantallas? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre las alturas y las bases de las pantallas?

Reúnete con un compañero y comprueba tus resultados, en caso de que no coincidan analicen el porqué de las diferencias.

Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad.

proyector de video o videoproyector. Aparato que recibe una señal de video y proyecta la imagen correspondiente en una pantalla usando un sistema de lentes, permitiendo así mostrar imágenes fijas o en movimiento.

Nexos

En segundo grado resolviste problemas que implicaban la representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, así como problemas de variación lineal entre dos conjuntos de cantidades y la representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$. Estos conocimientos te serán de utilidad para analizar diferentes situaciones. ■

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas:

1. Se vierten diferentes cantidades de agua en un vaso cónico, como se muestra en la Figura 2; en cada vaso vertido se mide la altura del agua y su volumen. Los datos se registran en la Tabla 2.

Figura 2

Tabla 2

Altura del agua (cm)	Volumen (cm^3)
5	8
8	30
11	63
12	98
14	132

a) ¿El volumen del agua es directamente proporcional a su altura? _______ ¿Por qué?

b) Construyan, en el plano de la Figura 3, una gráfica que represente la relación entre la altura del agua vertida en el vaso cónico y el volumen del agua.

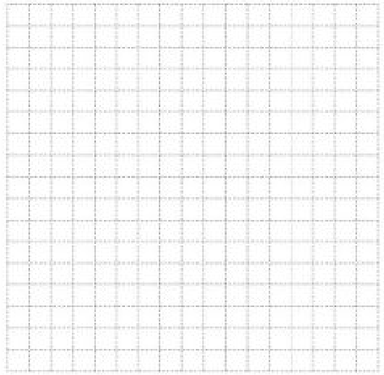


Figura 3

Tómalo en cuenta

Italo Marchiony produjo en 1896 el primer cono para helados. Se le concedió la patente en Diciembre de 1903.

c) ¿La gráfica que resulta cumple con las características de una gráfica que representa una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano?_______ ¿Por qué?

2. Se llenan por completo vasos cónicos que sólo son diferentes por su altura. Observen en la Figura 4. Se mide la altura de cada vaso y su volumen. Los datos se muestran en la Tabla 3.

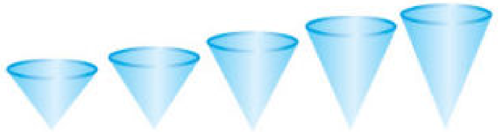


Figura 4

Tabla 3

Altura del vaso (cm)	Volumen (cm^3)
5	47
8	75
11	104
12	113
14	132

a) ¿Es el volumen directamente proporcional a la altura? _______ ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación entre las alturas y los volúmenes de los vasos?

c) Construyan una gráfica que represente la relación entre las alturas y los volúmenes de los vasos.

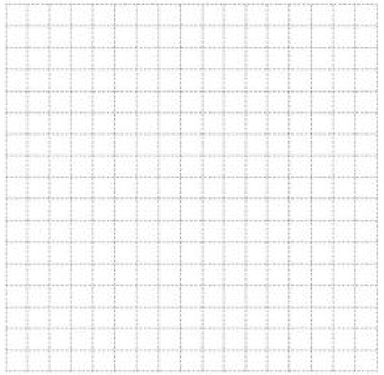


Figura 5

d) ¿La gráfica que resulta cumple con las características de una gráfica que representa una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano?_______ ¿Por qué?

Reúnanse con otras parejas de compañeros, comparen sus respuestas y comenten cómo se puede distinguir una situación de variación proporcional de otra que no lo es de acuerdo con su representación (gráfica, tabular o algebraica). Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Resuelvan el siguiente problema:

3. Un resorte sin peso tiene una longitud de 20 cm. Al suspender un objeto cuya masa es de 0.5 kg sufre un alargamiento de 10 cm; mientras que para un objeto cuya masa es de 800 g, sufre un alargamiento de 16 cm. Observa la Figura 6.

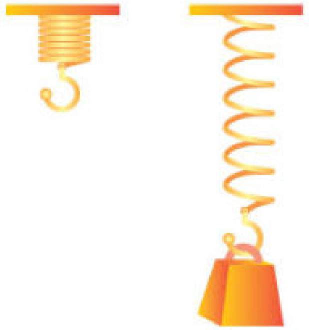


Figura 6

a) ¿Cuál es la masa del objeto que se suspendió si el resorte sufrió un alargamiento de 15 cm? ____________________

b) Escriban la expresión algebraica que representa la relación entre el alargamiento del resorte y la masa del objeto que se suspende. ____________________

c) Completen la Tabla 4 y escriban la expresión algebraica que representa la relación entre la longitud total del resorte y la masa del objeto que se suspende.

Tabla 4	Masa en gramos	0	500	1000	1500	2000
	Longitud total en centímetros	20	30	40		

d) Identifiquen la gráfica que representa la relación entre el alargamiento del resorte y la masa del objeto que se suspende y la que representa la relación entre la longitud total del resorte y la masa del objeto que se suspende. Luego, coloquen las etiquetas que corresponden en cada gráfica.

RDT

Visita la dirección electrónica http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/MENDEZ/directa.htm (última consulta: 13 de febrero de 2013).
En la página electrónica anterior se explica la función de proporcionalidad directa.
Comenta con tus compañeros y profesor lo que aprendiste al leer la información contenida.

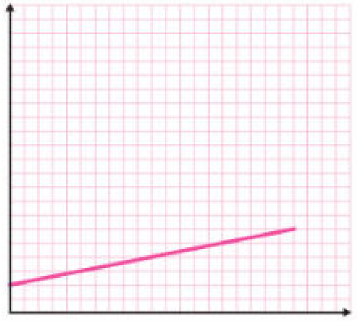


Figura 7

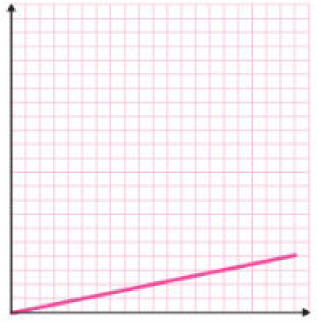


Figura 8

Comparen sus respuestas y sus gráficas con las de otros equipos y, en caso de que no coincidan, verifiquen sus procedimientos. Si tienen alguna duda que no puedan aclarar entre ustedes, pidan ayuda a su profesor.

4. Las gráficas de la Figura 9 muestran la relación entre pares de magnitudes. ¿Cuáles corresponden a una proporcionalidad directa? Justifiquen sus respuestas.

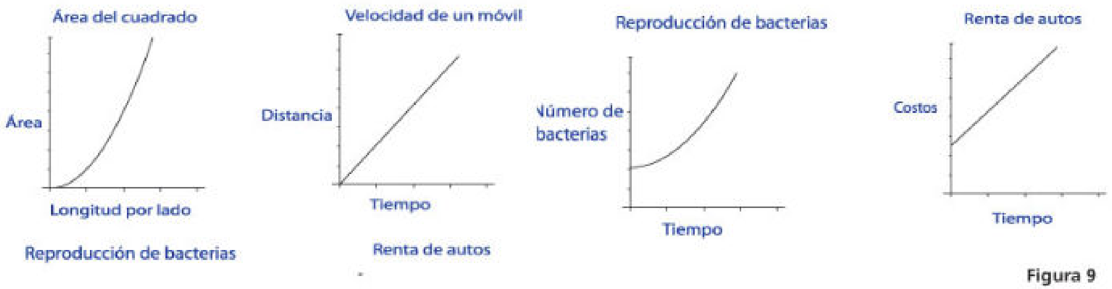


Figura 9

A partir de cada gráfica redacten en su cuaderno un problema que se asocie con ella.

Con ayuda de su profesor describan la diferencia que existe entre las representaciones de datos que guardan una variación lineal y aquellos que tienen una relación de proporcionalidad directa.
Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

En la cima

Resuelvan los siguientes problemas:

1. Un grifo está vertiendo por goteo una sustancia líquida en una **probeta** como se muestra en el esquema de la Figura 10.

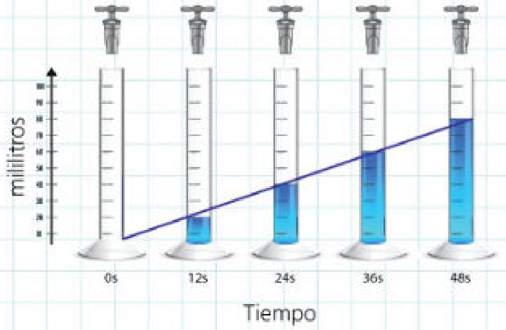


Figura 10

probeta graduada. Material de laboratorio que consiste en un tubo de cristal con una graduación en mililitros, litros, etcétera. Se utiliza para medir volúmenes de líquidos.

a) ¿Qué cantidad de sustancia vierte, por segundo, el grifo en la probeta?
b) ¿Qué tiempo ha transcurrido cuando la probeta contiene una cantidad de 100 ml?
c) ¿La relación entre los militros y el tiempo es proporcional?______ ¿Por qué?
d) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esta situación?
e) Las coordenadas que corresponden a la cantidad de sustancia vertida en un tiempo de 120 segundos son (120, 200). ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto cuyo abscisa es 60?

2. El depósito de una jeringa es un cilindro de base fija y altura variable, como se muestra en la Figura 11. Si el área de la base del cilindro es de 1.1 cm², ¿cuáles son los datos que faltan en la Tabla 5?

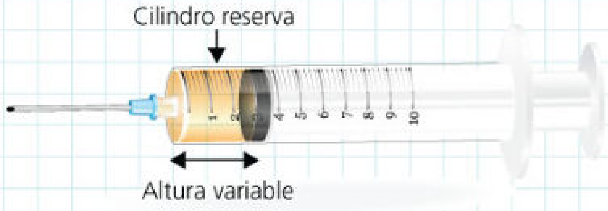


Figura 11

Altura (cm)	1	2	3	4	5
Volumen del cilindro en cm³					

Tabla 5

a) Dibujen una gráfica en el plano de la Figura 12 representando el volumen en función de la altura del cilindro de la jeringa.

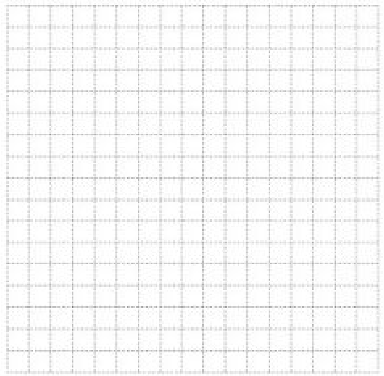


Figura 12

b) ¿Es el volumen proporcional a la altura?

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona el volumen en función de la altura?

Comparen sus resultados con los de otros equipos. En caso de que no coincidan, verifiquen sus operaciones. Si tienen alguna duda, pidan ayuda a su profesor y pónganla a consideración de todo el grupo.

Escriban en su cuaderno la ventaja de usar cada una de las representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación.

Destreza y estrategia

Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no. Determina en cuáles de estas situaciones aparece la proporcionalidad:

1. Los numeradores y denominadores de todas las fracciones que son equivalentes entre sí (representantes del mismo racional).
2. La longitud de cualquier circunferencia con su diámetro (o su radio): $C = \pi d$.
3. El volumen de líquido introducido en un recipiente con una sección regular (por ejemplo, prisma o cilindro) y la altura del líquido en el recipiente. (Esto permite la lectura del volumen graduando la altura).
4. El volumen de líquido que sale de un grifo de caudal constante y el tiempo que mantenemos el grifo abierto.
5. El precio que pagamos al comprar un producto (por ejemplo, al llenar el depósito de gasolina) y la cantidad comprada (litros, en el ejemplo).
6. Fijado un porcentaje, las medidas de las cantidades a las cuales se aplica dicho porcentaje (precios, pesos, etcétera) y los valores resultantes del cálculo porcentual.
7. La edad y la altura de un niño.
8. Las situaciones en las que los precios aumentan proporcionalmente a la duración o distancia, pero a partir de un valor inicial no nulo (precio de un recorrido en taxi, ya que la bajada de bandera se debe pagar aunque el tiempo o la distancia sea mínima).

Reúnete con un compañero y comparen sus resultados. Discutan cómo fue que obtuvieron cada uno de ellos. En caso de alguna duda, consulten a su profesor.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Trabajé en equipo durante la lección.			
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			
Contribuí a verificar los resultados en equipo y grupo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó el tipo de relación entre dos grupos de datos.			
Propuso expresiones algebraicas para representar la relación entre cantidades.			
Colaboró en el análisis de las gráficas para asociar al tipo de relación entre sus datos.			
Identificó las características de las representaciones que corresponden a una relación de proporcionalidad.			
Argumentó sus respuestas y escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 5

Representaciones gráficas y tabulares de variaciones

Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.

Nexos

En segundo grado resolviste problemas que implicaban leer y representar mediante una tabla o una expresión algebraica diversos fenómenos de variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Además, en la Lección 1 has resuelto problemas que implican establecer una ecuación cuadrática, así como en la Lección anterior analizaste representaciones gráficas, tabulares y algebraicas, que corresponden a una misma situación lineal y de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. Retomar estos conocimientos te será de utilidad en esta lección.

Explor@

Resuelve el siguiente problema:

1. Un helicóptero dejó caer un automóvil desde una altura de 245 m. Algunos datos registrados se muestran en la Tabla 1.

Figura 1

Tabla 1

Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4
Distancia de caída (m)	0	5	20	45	80

a) De acuerdo con la información, completen la Tabla 2:

Tiempo	Distancia de caída	Altura a la que se encuentra el automóvil
0	0	245
1	5	240
2	20	
3	45	
4		
5		
6		
7		

Tabla 2

b) ¿Cuánto tiempo tardó el auto en llegar al suelo?

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la distancia de caída (d) en función del tiempo transcurrido (t)? Justifica tu respuesta.

$d = 5t$ $\quad$ $d = 5t^2$ $\quad$ $d = 25t$ $\quad$ $d = 5 + t^2$

Reúnete con un compañero y compara tu gráfica, así como tus respuestas. Si no coinciden, verifiquen por qué.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas. Justifiquen sus respuestas.

1. Cuando se proyecta una película, el área de la pantalla depende de la distancia a la que se coloque el proyector. Observa la Figura 2. En un estudio sobre la potencia de un proyector, se obtuvieron los datos que se muestran en la Tabla 3.

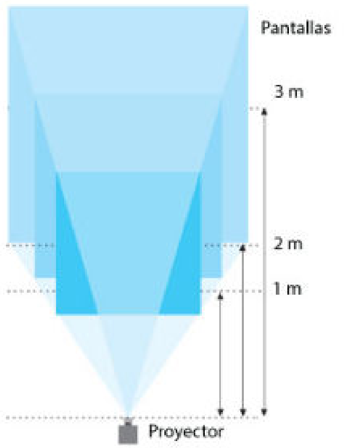


Figura 2

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	2	3	4
Área de la pantalla (m^2)	4	16	36	64

Tabla 3

a) ¿Qué operación es necesario hacer con la distancia para obtener el área de la imagen?

b) Representen con la literal d la distancia entre el proyector y la pantalla, escriban la expresión algebraica que muestre la relación entre las distancias y las áreas.

c) Utilicen la expresión algebraica que escribieron anteriormente y completen los datos faltantes en la Tabla 4.

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1.5	2.5	3.5	4.5
Área de la pantalla (m^2)				

Tabla 4

d) ¿A qué distancia se debe colocar el proyector de manera que el área de la imagen sea de 24.01 m^2?

$d =$ ____________

2. Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratas que fueron alimentadas con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje (x) de 0% a 100% de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de una rata en un período de tiempo está dado por la siguiente función:

$$P = -0.02x^2 + 2x + 15,$$

De acuerdo con la información, encuentren aproximadamente cuál es el porcentaje de levadura en la mezcla de proteína en la cual las ratas ganan mayor peso. Para ello, realicen lo siguiente:

a) Completen la tabla siguiente con los diferentes pesos ganados por la rata para los valores de x que se proponen.

Porcentaje de levadura (x)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Peso (g)	33							47	

Tabla 5

b) Grafiquen los valores en el siguiente plano.

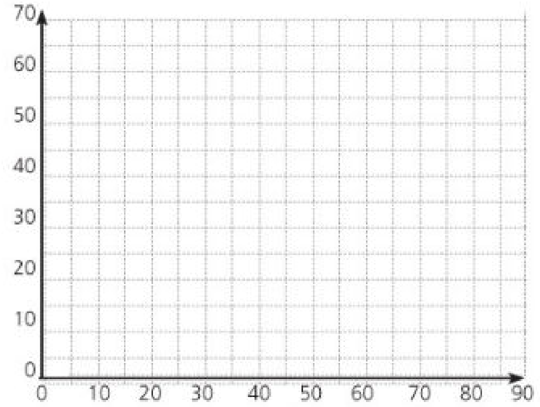


Figura 3

Nexos

En el bloque 1 de la asignatura de Ciencias 2 estudiaste el tema de aceleración, revisa tus apuntes y retoma las ecuaciones de caída libre y tiro parabólico para comprender mejor las ecuaciones cuadráticas que se emplean en esta lección. ■

c) Digan cuál es el porcentaje de levadura en la mezcla con el que la rata alcanza su mayor peso.

d) ¿Digan qué rango de porcentajes de levadura en la mezcla no se gana el mayor peso?

e) La pregunta anterior, ¿se puede responder resolviendo la siguiente ecuación cuadrática?

$P = -0.02x^2 + 2x + 20$

Justifiquen su respuesta.

3. Se lanza una pelota a 25 m del suelo hacia arriba. La altura que alcanza la pelota (medida desde los 25 metros) en función del tiempo (medido en segundos), se calcula a través de la siguiente fórmula: $h(t) = -5t^2 + 20t + 25$, donde t representa el tiempo.

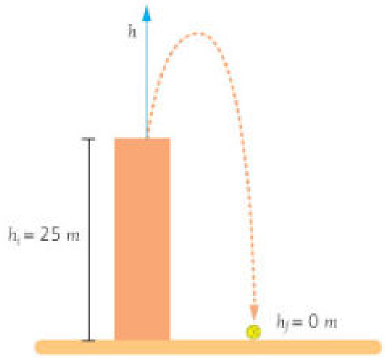


Figura 4

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y en qué momento lo hace?

b) ¿Después de cuánto tiempo cae la pelota al suelo?

Reúnanse con otra pareja de compañeros, comparen sus respuestas y comenten cómo fue que llegaron a sus respuestas, por ejemplo, si usaron alguna tabla para representar los datos y si fue necesario resolver una ecuación.

Analicen las expresiones algebraicas que representan a cada situación anterior, identifiquen semejanzas y diferencias. Hagan lo mismo con las gráficas obtenidas. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Una expresión algebraica de la forma: $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, se llama función cuadrática.

En la expresión anterior ax^2 es el término cuadrático, bx es el término lineal, y c el término independiente.

Ejemplo: $4x^2 - 2x + 5$

$4x^2$ es el término cuadrático, $-2x$ es el término lineal y 5 es el término independiente.

Resuelvan el siguiente problema.

4. Se arroja un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 m/s. Su altura en función del tiempo se puede aproximar por la fórmula $h(t) = -5t^2 + 80t$.

a) ¿Cuánto tiempo dura el movimiento ascendente?

b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

c) ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

d) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde su partida cuando se encuentra a 300 m de altura?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten cómo fue que llegaron a ellas; por ejemplo, si usaron alguna tabla para representar los datos y si fue necesario resolver una ecuación. En caso de dudas, consulten a su profesor.

RDT

Visita la dirección electrónica http://www.educatina.com/algebra/funcion-cuadratica-1 (última consulta: 14 de febrero de 2013).

En esta página se analiza cómo llevar las ecuaciones cuadráticas al campo de las funciones.

Comenta con tus compañeros sobre la construcción de la tabla y la gráfica a partir de la expresión algebraica y sus características. Escriban sus conclusiones. ■

En la cima

Resuelvan los siguientes problemas. Utilicen su calculadora.

1. El director de un circo estima que si cobra \$30.00 por localidad, podría contar con 500 espectadores y que cada \$1.00 que reduzca en el precio por localidad, aumentaría 100 personas más. La situación se presenta en la Tabla 6.

Pesos de reducción en el costo de la localidad (\$)	Costo por localidad (\$)	Número de espectadores	Ingresos
0	30	500	(30) (500)
1	30 – 1	500 + 100(1)	(30 – 1) [500 + 100 (1)]
2	30 – 2	500 + 100(2)	(30 – 2) [500 + 100 (2)]
3	30 – 3	500 + 100(3)	(30 – 3) [500 + 100 (3)]
x	30 – x	500 + 100(x)	(30 – x) [500 + 100 (x)]

Tabla 6

Los ingresos que se pueden obtener en función del número de pesos que se reduzca el costo de la localidad, se representa con la siguiente expresión:

$$I(x) = (30 - x)\ (500 + 100x)$$

a) De acuerdo con la información anterior, ¿qué representa x en la expresión algebraica?
b) Resuelvan el producto de binomios para expresar el ingreso I(x) como un trinomio.
c) Elaboren una tabla que muestre las ganancias si el precio por localidad se reduce: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 pesos, respectivamente.
d) Calculen cuánto se redujo el precio de la localidad y el número de espectadores que asistieron a una función del circo, si en taquilla se tuvo un ingreso de \$19 600.00

2. Una moneda de cobre a una temperatura de 0 °C tiene un radio de 5 mm, al ser sometida a un incremento de temperatura de 100 °C el radio de la moneda aumenta su tamaño en 1 mm.

a) Completen la siguiente tabla:

Temperatura (°C)	0	100	200	300	400	x(100)
Radio (mm)	5	5 + 1	5 + 2	5 + 3	5 + 4	5 + x
Área (mm²)	$\pi\ (5)^2$	$\pi\ (5 + 1)^2$				

Tabla 7

b) Escribe la expresión algebraica que relaciona la superficie de la moneda con el aumento de temperatura.
c) Si el cobre no se funde hasta los 1 000 °C, ¿qué tamaño máximo alcanza la moneda?
d) Si queremos que la moneda no se cuele por un agujero de 14.5 mm de diámetro, ¿a qué temperatura debe estar la moneda?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten cómo fue que llegaron a ellas, por ejemplo, si emplearon alguna tabla. En caso de que no coincidan, comparen si todos comprenden de la misma forma la información contenida en las tablas. Pidan ayuda a su profesor en los casos donde tengan dificultades.

En su cuaderno escriban las características que identificaron en las representaciones (tabular y algebraica) de situaciones cuyos datos presentan una relación cuadrática.

Destreza y estrategia

Resuelve el siguiente problema.

1. El señor Reyes posee un hotel que tiene 80 habitaciones (cuartos dobles). Este hotel es muy importante en la ciudad y alberga a muchos turistas extranjeros. El señor Reyes desea maximizar sus ganancias para luego invertirlas en la construcción de otro hotel. Sin embargo, ello depende de las siguientes condiciones:
   - El precio por habitación es de 60 dólares por día.
   - Hay un costo de mantenimiento de 4 dólares por habitación diariamente.
   - Por cada dólar que se aumenta al costo por habitación, se ocupa una habitación menos.

a) Completa la Tabla 8 que relaciona los datos del problema.
b) ¿Siempre que se reduce el costo por habitación, aumenta el ingreso? Justifica.

Número de dólares que se aumentan al costo por habitación	Cuartos	Utilidad por cuarto dólares)	Ganancia (dólares)
0	80	56	4480
1	80 – 1	56 + 1	4503
2	80 – 2	56 + 2	4524
3	80 – 3	56 + 3	4543

4	80 – 4	56 + 4	4560
5	80 – 5	56 + 5	4575
6	80 – 6	56 + 6	4588
7	80 – 7	56 + 7	4599
8	80 – 8	56 + 8	4608
9	80 – 9	56 + 9	4615
10		56 + 10	4620
11			4623
12			4624
13			4623
14			4620
15			4615
x	$80 - x$	$56 + x$	$-x^2 +$ ________

Tabla 7

c) ¿Para qué valor de la reducción es el ingreso máximo? Trabaja en el recuadro.

d) Generaliza tu resultado, de tal manera que el señor Reyes pueda aplicarlo aun cuando el costo de la habitación o el mantenimiento hubieran cambiado.

e) Presenta una propuesta que ayude al señor Reyes a maximizar sus ganancias (de acuerdo con las condiciones presentadas).

Comparen con sus compañeros los resultados, procedimientos y argumentos empleados para resolver la actividad, con ayuda de su profesor analicen las propuestas para maximizar las ganancias.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Comparé mis resultados de forma respetuosa.			
Escuché con atención y respeté la intervención de mis compañeros.			
Participé en las discusiones.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Propuso alguna expresión algebraica para representar la relación entre los datos contenidos en las tablas.			
Colaboró en el análisis de las tablas para asociar al tipo de relación entre las cantidades.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 6
Escala de la probabilidad

Explora

Resuelve el siguiente problema:

1. José y Aurora están analizando un juego de azar, para ello utilizan los dos materiales que se muestran en la Figura 1. Primero se hace girar la ruleta, si se detiene en un número impar, el jugador toma una canica de la bolsa. Se gana un premio cuando la canica que se saca es negra. Aurora juega una vez. ¿Qué tan probable es que Aurora gane un premio?

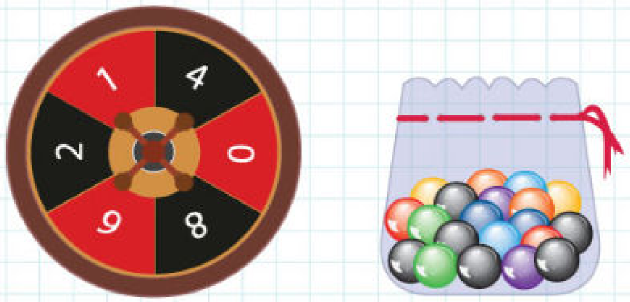


Figura 1

a) Imposible
b) Poco probable
c) Muy probable
d) Seguro

2. José tiene una bolsa con 10 canicas blancas y 20 canicas negras. Aurora tiene una bolsa con 20 canicas blancas y 40 canicas negras. El juego consiste en sacar, sin ver, cada quien una canica de su bolsa. Gana el primero que saque una canica blanca. Si a los dos les sale una canica blanca o negra, el juego continúa. José dice que el juego no es equitativo porque la bolsa de Aurora contiene más canicas blancas. ¿Tú qué opinas?

Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas; en caso de que haya diferencias, averigüen quién tiene la razón, justifiquen sus argumentos.

Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes.

Nexos

En grados anteriores, identificaste y practicaste juegos de azar donde tenías que anticipar, registrar resultados y elegir una estrategia en función del análisis de resultados posibles. También resolviste problemas de conteo mediante diagramas rectangulares o diagramas de árbol. Comparaste dos o más eventos a partir de sus resultados y realizaste experimentos para relacionar la probabilidad teórica con la probabilidad frecuencial.

En construcción

Resuelvan la siguiente actividad. Justifiquen sus respuestas.

1. Aurora realiza otro experimento, "Lanzar dos dados al mismo tiempo"; el siguiente esquema representa todos los resultados posibles.

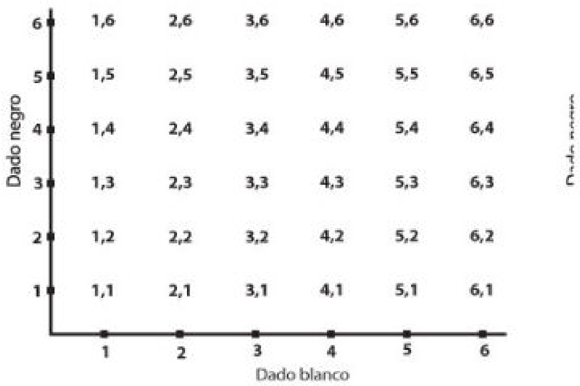


Figura 2

a) De acuerdo con lo anterior, completen la Tabla 1:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Casos favorables	(1,1)	(1,1) (2,1)									
Frecuencia	1	2									
Posibilidad de salir la suma	1 de 36	2 de 36									

Tabla 1

b) Con base en los resultados de la tabla, contesten lo siguiente:

- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 3" es $\frac{2}{36}$ = 0.055
- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 4" es $\frac{3}{36}$ =
- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 5" es $\frac{\_\_}{36}$ =
- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 6" es ___ =

c) De los cuatro eventos anteriores, ¿cuál tiene mayor probabilidad? ¿Por qué?

d) Completen las siguientes afirmaciones:

- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 3" es 5.5%
- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 4" es ______
- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 5" es ______
- La probabilidad del evento "La suma de sus caras es 6" es ______

e) En el experimento de lanzar dos dados al mismo tiempo, ¿puede haber un evento cuya probabilidad sea $\frac{40}{60}$? __________ ¿Por qué?

f) ¿Cuál es la máxima probabilidad de un evento?

g) ¿Cuál es la probabilidad de obtener en la suma un número que vaya del 2 al 12?

h) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 14? __________

Reúnanse con otra pareja de compañeros, comparen sus respuestas y comenten cuáles son las tres formas diferentes de expresar la probabilidad de un evento y cuál es la escala. Al terminar redacten sus conclusiones en su cuaderno y compárenlas con el texto siguiente.

El **espacio muestral** (E) asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los resultados posibles al realizar dicho experimento. Un **evento o suceso** es todo subconjunto de un espacio muestral. Por ejemplo, en el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del lanzamiento de un dado, algunos eventos son: obtener un número primo y par, $A = \{2\}$ u obtener un número mayor o igual que 4, $B = \{4, 5, 6\}$.

La medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento A cuando se realiza un experimento aleatorio se llama **probabilidad del evento A** y se representa con **P(A).**

La probabilidad es una medida sobre la escala 0 a 1 de tal forma que:

- Al evento **imposible** le corresponde el valor 0.
- Al evento **seguro** le corresponde el valor 1.

Resuelvan los siguientes problemas.

2. El esquema de la Figura 3 representa el espacio muestral de un experimento aleatorio y tres eventos simples que corresponden a dicho experimento.

Con base en esta información contesten:

a) ¿En qué consiste el experimento?

b) Describan los eventos señalados con una línea, dos líneas, tres líneas como evento A, B y C, respectivamente.

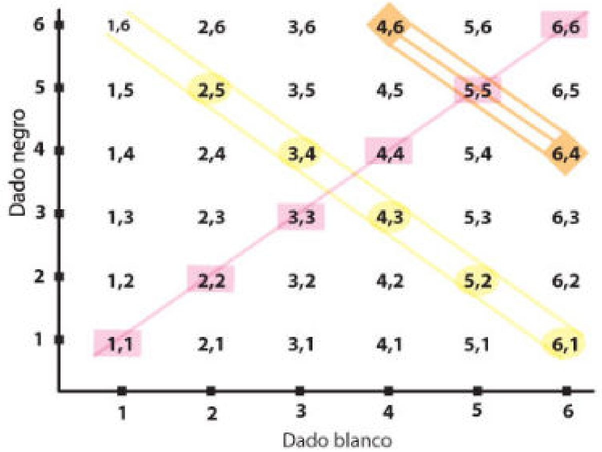


Figura 3

Evento A: ____

Evento B: ____

Evento C: ____

c) ¿Cuáles de los eventos anteriores tienen elementos comunes?

d) ¿Cuáles de los eventos anteriores no tienen elementos comunes? ¿Por qué?

e) ¿Cuál es la probabilidad de esos eventos?

$P(A) =$ $P(B) =$ $P(C) =$

3. Consideren el experimento aleatorio de lanzar dos monedas.

a) ¿Cuál es el espacio muestral asociado?

b) Escriban los eventos que se indican.

Evento seguro A: ____

Evento imposible B: ____

c) Analicen los siguientes eventos y calculen su probabilidad.

C: "Obtener dos soles" $P(C) =$

D: "Obtener por lo menos un sol" $P(D) =$

E: "Obtener dos águilas" $P(E) =$

d) ¿Cuáles son las características de los eventos C y D?

e) ¿Cómo son entre sí los eventos D y E? ¿Y los eventos C y E?

f) ¿Cuáles eventos pueden ocurrir de manera simultánea? ¿Cuáles no?

g) Si se han lanzado dos monedas y se obtuvieron dos águilas, ¿cómo es la probabilidad de que al volver a lanzar las monedas se obtengan dos soles con respecto de la probabilidad de obtener dos águilas?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Es probable que algunos compañeros hayan expresado la probabilidad como número decimal o como porcentaje, verifiquen que sus resultados sean equivalentes.

Al terminar lean la información siguiente y con el apoyo de su profesor cotéjenla con sus observaciones.

Los **eventos mutuamente excluyentes** son aquellos que no tienen elementos comunes y por lo tanto no pueden ocurrir de manera simultánea.

Dos eventos se denominan **complementarios** cuando su unión da el espacio muestral y no tienen elementos comunes. La suma de las probabilidades de dos eventos complementarios es igual a 1.

Cuando la probabilidad de un evento no es afectada por el resultado del otro, a estos eventos se les llaman **eventos independientes.**

RDT

Visita la dirección electrónica http://www.amschool.edu.sv/paes/e6.htm (última consulta: 20 de febrero de 2013).

En la página anterior encontrarás los conceptos básicos de probabilidad. Una vez que hayas leído los conceptos, realiza los ejercicios que se proponen. Compara tus resultados con tus compañeros; en caso de dudas soliciten el apoyo de su profesor.

En la cima

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Analicen el siguiente experimento e identifiquen las características de los eventos A, B, C y D. Luego escriban "Falso" o "Verdadero" en los espacios vacíos de la tabla, según corresponda.

Experimento: Lanzar un dado.
Espacio muestral: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Eventos	Características		
Evento A: "Cae un número menor o igual que dos" $A = \{1, 2\}$ B: "Cae un número mayor que cuatro", $B = \{5, 6\}$			
	Los eventos A y B son eventos mutuamente excluyentes	Los eventos A y B son eventos complementarios	Los eventos A y B son eventos independientes
C: "Cae un múltiplo de tres" $C = \{3, 6\}$ D: "No cae un múltiplo de tres" $D = \{1, 2, 4, 5\}$			
	Los eventos C y D son eventos mutuamente excluyentes	Los eventos C y D son eventos complementarios	Los eventos C y D son eventos independientes

Tabla 2

2. Se lanza un dado dos veces seguidas y en todas ellas ha caído el número 1. ¿Cuál es la probabilidad de que en el tercer tiro salga el número 1?

3. José y Aurora continúan haciendo experimentos aleatorios; en una caja colocan cuatro pelotas de distinto color (amarilla, azul, negra y roja). José extrae una pelota al azar, anota el color y la devuelve a la caja. Si en la primera extracción se tomó la pelota roja, en una segunda la amarilla y en una tercera nuevamente la roja, ¿qué probabilidad hay de sacar la pelota azul en una cuarta extracción?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten cómo fue que llegaron a ellas. En los casos donde tienen dificultades, pidan ayuda a su profesor; al terminar redacten sus conclusiones en el cuaderno.

Destreza y estrategia

1. Señala en cada caso qué tipo de eventos corresponden y por qué. El precio por habitación es de 60 dólares por día.

a) Experimento: "Lanzamiento de un dado"
Evento $B = \{2\}$
Evento $C = \{5, 6\}$
Los eventos son: ____________________ porque ______________
____

b) Experimento: "Lanzamiento de un dado"
Evento $B = \{1, 3, 5\}$
Evento $C = \{2, 4, 6\}$
Los eventos son: ____________________ porque ______________
____

c) Experimento: "Lanzamiento de un dado y una moneda"
Evento $B = \{6, A\}$
Evento $C = \{(1, S), (2, S), (3, S), (4, S), (5, S)\}$
Los eventos son: ____________________ porque ______________
____

Comparen sus respuestas con sus compañeros. Con ayuda de su profesor busquen algunos ejemplos más de cada tipo de eventos.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché y respeté las opiniones de los demás.			
Mis aportes contribuyeron al éxito de las actividades.			
Realicé mis tareas responsablemente.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Propuso alguna probabilidad de los eventos como fracción, número decimal o porcentaje.			
Colaboró en la determinación del tipo de eventos.			
Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 7
Población y muestra

Explor@

1. Analiza la siguiente información y contesta las preguntas que se presentan:

Según los resultados de la Encuesta Nacional de Lectura (ENL) 2012, se estima que el promedio anual de libros leídos por mexicanos mayores de 12 años es de 2.94 libros.

Figura 1

Además, entre otros, se analizaron las preferencias de las personas en edad escolar de nivel secundaria y bachillerato, las cuales se observan en la Tabla 1.

¿QUÉ PREFIERE USTED?						
		Leer Periódicos (%)	Leer Revistas (%)	Leer Libros (%)	No tengo preferencias (%)	NS/NC (%)
Edad	12-17 años	5.9	19.6	36.8	35.3	2.4

Tabla 1

a) ¿De qué forma piensas que se obtuvieron estos datos?
b) ¿Los resultados de preferencia de la Tabla 1, representan tus gustos?
c) ¿Consideras que se entrevistó a todos los mexicanos mayores de 12 años para concluir los resultados de la gráfica de la Figura 1? Justifica.

Compara con tus compañeros tus respuestas. Al terminar realiza una discusión grupal acerca de los resultados de la encuesta.

Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en grados anteriores, por ejemplo: lectura y comunicación de información representada por medio de diferentes recursos gráficos, proveniente de estudios sencillos y de diversas fuentes, te serán de utilidad para obtener información acerca de las características de una población.

En construcción

1. Analicen los hábitos de lectura de los estudiantes de su escuela o bien, formulen una o dos preguntas para indagar acerca de algunas opiniones o características que deseen conocer de la comunidad estudiantil.

Tómalo en cuenta

Al leer ddesarrollas tu capacidad de observación, atención y concentración.

a) Supongan que tienen la posibilidad de formular las preguntas a cualquier estudiante y registrar sus respuestas.
- ¿Qué se puede hacer para obtener información valiosa sobre las preguntas formuladas y no invertir demasiados recursos?
- ¿A quiénes y a cuántos deben acercarse para consultar?
- ¿Qué instrumentos o medios emplearán para conseguir la información que desean?
- ¿Cómo registrarán los datos que obtengan?
- ¿Qué herramientas matemáticas les serán útiles para analizar los datos?

b) Elaboren un plan que responda a las preguntas anteriores y les permita obtener la información que desean.
- ¿Es posible entrevistar a todos los estudiantes de la escuela? ¿Por qué?
- ¿Cuánto tiempo pueden asignar para recolectar la información?
- ¿Cuál es la utilidad de obtener información acerca de las opiniones o características de un grupo de personas?
- ¿Consideran que es posible mejorar el trabajo realizado para aumentar la utilidad de la información obtenida? ¿Por qué?

Reúnanse con otro equipo e intercambien los planes de trabajo elaborados. Con ayuda del profesor comenten sobre lo adecuado de la información que desean obtener y la manera de mejorar los planes de trabajo para conseguirla.

g

estadística. Rama de las matemáticas que se encarga de la recolección, representación, análisis, interpretación y aplicaciones de datos numéricos a través de un conjunto de técnicas con rigor científico.

inferencia. Es el proceso para conocer las características de una población a través del estudio de una muestra.

Se llama **población** a todos los elementos de un estudio, pueden ser personas, animales, cosas o características de ellos; una **muestra** es una parte de la población.

Una investigación **estadística** surge cuando se quiere conocer alguna información sobre una población; para esto se formulan preguntas sobre las características que se quiere conocer. Por lo regular, no es posible o viable hacer el estudio sobre toda la población y se elige hacerlo sobre una muestra. La intención es generalizar a toda la población la información obtenida al investigar la muestra, a dicha generalización se le llama **inferencia.**

El grado de certeza de la inferencia depende de las características de la muestra.

Con base en la información anterior, discutan y determinen cuál es la población de su estudio y cuál es la muestra.

2. El equipo de Héctor, Diego y Aurora, hizo la siguiente pregunta:
¿Cuál es el lugar de la República Mexicana con mayor atractivo turístico?

Para no invertir demasiados recursos en averiguarlo decidieron formular la pregunta a 30 estudiantes de la escuela.

Al preguntarse cómo los elegirían, cada uno propuso un método:

- Método de Aurora: Meter en una urna tarjetas, cada una con el nombre de los diez principales lugares turísticos registrados en Internet. Revolver bien todas las tarjetas y sacar 30 al azar.
- Método de Diego: Pararse a la entrada de la escuela y hacerles la pregunta a todos aquellos que vayan llegando hasta completar los 30.
- Método de Héctor: Preguntarles a 30 compañeros del grupo.

a) ¿Cuál de estos procedimientos es más apropiado para obtener una muestra lo más representativa posible de todos los alumnos de la escuela? Expliquen su respuesta.

3. Una vez elegidos los 30 estudiantes les hicieron la pregunta a cada uno y obtuvieron las respuestas que se organizaron en la Tabla 2.

Lugar de la República Mexicana	Número de alumnos
Acapulco	6
Veracruz	2
Teotihuacán	1
Oaxaca	3
Yucatán	4
Guanajuato	2
Mazatlán	1
Cancún	5
Distrito Federal	2
Monterrey	2
Guadalajara	2

Tabla 2

a) Realicen una gráfica que a su juicio consideren representa adecuadamente los datos obtenidos.

b) ¿Qué se puede decir acerca de la opinión entre los estudiantes de la secundaria? Escriban en su cuaderno un informe.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas y sus gráficas. Comenten si la gráfica que eligieron representa mejor la información o debiera ser otro tipo de gráfica.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica: http://cuentame.inegi.org.mx/ (última consulta: 26 de febrero de 2013).

En esta página podrás encontrar reportes de investigaciones sobre tres grandes temas relacionados con nuestro país: Territorio, Población y Economía.

2. Formula una pregunta sobre población, territorio o economía y responde con los datos proporcionados en la página electrónica. Menciona si la respuesta se basa en la población o en una muestra.

3. Reúnete con otros compañeros e intercambien sus preguntas y la información. Comenten cómo se aplican las nociones de muestra y población en la información que respondió a sus preguntas respectivas.

Analicen las siguientes situaciones.

4. El equipo de Diego también quiere conocer el porcentaje de estudiantes que tienen mascotas (perros, gatos, hámsters, etcétera).

a) ¿Cuál es la población?

b) Escriban la pregunta que les sea útil para la investigación.

____

c) Si el total de alumnos de la escuela es 480, digan cuál de las siguientes propuestas sobre el tamaño de la muestra es más conveniente para hacer el estudio:

- Que la muestra sea de tamaño 10.
- Una muestra de tamaño 48.
- Una muestra de tamaño 200.

d) Justifiquen el porqué de su elección. ______________________________

____

____

____

e) Una vez decidido el tamaño de la muestra, discutan una manera de elegirla. El siguiente texto puede servirles como referencia.

Una muestra es **representativa** cuando la información que contiene es similar a la de toda la población. Aunque no se puede saber con certeza cuándo una muestra es representativa o no, hay dos criterios que permiten tomar decisiones para mejorar la representatividad de una muestra:

- Una muestra más grande generalmente es más representativa que otra más pequeña.
- Una muestra aleatoria (es decir, elegida al azar de manera que cualquier miembro de la población tenga la misma probabilidad de quedar en la muestra) generalmente es más representativa que otra que no haya sido elegida al azar.

Las muestras aleatorias son las que se utilizan en los análisis estadísticos.

Nexos

Retoma los contenidos de esta lección en el Proyecto 3 "Analizar el efecto de los mensajes publicitarios a través de encuestas", del Bloque 1 de la asignatura Español 3.

Cuando no es posible elegir una muestra aleatoria o resulta muy costoso obtenerla, es posible hacer investigaciones con muestras no aleatorias. Para estos casos se consideran otros dos tipos de muestra:

Una muestra es **forzada** cuando no se tiene opción de elegir.

Se considera que una muestra es por **conveniencia** cuando se elige aprovechando alguna facilidad para obtenerla.

5. Retomen el plan de trabajo para el tema de su encuesta y analicen el tamaño de la muestra que les será más útil y la manera de cómo deberán elegirla.

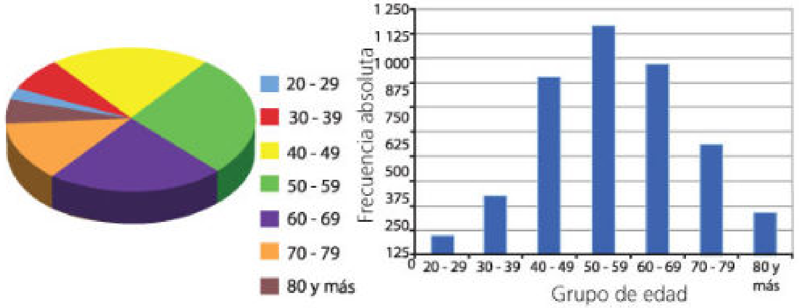
Revisen nuevamente su plan para afinar detalles y apliquen la encuesta a sus compañeros.

Al terminar, reúnan los datos para su análisis. Soliciten ayuda a su profesor durante el desarrollo de la encuesta y análisis de resultados obtenidos.

6. A partir de los datos obtenidos en la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012 se organizó la información que se muestra en la Tabla 3; dicha encuesta se aplicó a 46 303 personas de 20 años o más, de las cuales 4 244 reportan haber recibido un diagnóstico médico de diabetes.

Grupo de edad (años)	Frecuencia absoluta	%
20 -29	104	2.5
30-39	312	7.4
40-49	912	21.5
50-59	1 158	27.3
60-69	972	22.9
70-79	562	13.2
80 y más	221	5.2
TOTAL	4 244	100

Tabla 4. Fuente: http://ensanut.insp.mx/informes/ENSANUT2012ResultadosNacionales.pdf



Relaciónalo con...

Educación para la salud. La práctica de actividades deportivas y una sana alimentación son factores que ayudan a prevenir y controlar enfermedades como la diabetes.

Figura 2

a) ¿Cuál de las dos gráficas de la Figura 2 refleja adecuadamente los datos y nos permite establecer relaciones visuales fiables entre ellos? Argumenten su respuesta.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas.

7. Después de analizar los resultados de su encuesta elijan el tipo de representación gráfica que más les convenga. Pueden elegir entre gráficas de sectores, gráficas de barras (verticales u horizontales), pictogramas, histogramas, polígonos de frecuencia, etcétera.

Es importante que en su análisis de resultados trabajen algunas medidas de tendencia central.

Con ayuda de su profesor organicen la manera en que presentarán a su grupo las conclusiones obtenidas de su trabajo.

En la cima

Mucho de nuestro conocimiento no lo investigamos por nuestra propia cuenta, sino que aprovechamos la información que nos proporcionan otros. Por esta razón es muy importante saber hacer un informe de investigación.

1. Hagan un informe final de la encuesta que realizaron.
   El informe debe ser breve, preciso y contener al menos los siguientes elementos:
   - Título.
   - Presentación del tema.
   - Descripción del cuestionario empleado.
   - Mencionar la población de estudio, el tamaño de la muestra y la manera en que se eligió o el censo en el que se obtuvieron los datos.
   - Descripción de los resultados obtenidos (uso de tablas o gráficas).
   - Análisis de los datos encontrados.
   - Conclusiones.

2. Presenten el trabajo final a sus compañeros por medio de una exposición. Si en su escuela cuentan con equipo de cómputo apoyense de diapositivas, trasparencias y/o procesador de textos.

En su presentación deben explicar los datos de tablas y gráficas. Las tablas de frecuencias y las representaciones gráficas las pueden realizar en una hoja de cálculo electrónica.

Recuerden que una buena presentación además, contiene enunciados valorativos y conjeturas referentes al contexto al que pertenecen los datos.

Comparen su trabajo con los de otros compañeros y analicen los aciertos y errores de los trabajos realizados, para mejorarse; por ejemplo, la elección de la población, el tamaño y la elección de la muestra, por qué decidieron una u otra forma de presentar los datos, etcétera.

En tu cuaderno escribe tus conclusiones acerca de la utilidad de las encuestas y la importancia de la comunicación de los resultados obtenidos en ellas.

RDT

Si necesitas ayuda para manejar las hojas de cálculo y sus gráficos puedes recurrir a la siguiente página o a otras similares que consideres apropiadas:

http://www.deseoaprender.com/CursoExcel/PagMenuExcel.htm (última consulta: 26 de febrero de 2013).

Destreza y estrategia

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. A continuación se describen brevemente las muestras de varios estudios, indica cuál es aleatoria, cuál forzada y cuál por conveniencia:
   a) Se está haciendo un estudio con los enfermos de enfisema pulmonar que actualmente se atienden en un hospital de especialidades, para conocer más sobre los orígenes de dicha enfermedad. El tipo de muestra es ____________.
   b) Se está haciendo un estudio sobre la relación entre la práctica de la actividad física y deporte y niveles de **resiliencia** entre adolescentes en México. El tipo de muestra es ____________.
   c) En un estudio sobre los hábitos de los usuarios de Internet en México, se aplicó anualmente una encuesta a 12 300 entrevistados de entre 12 y 64 años en 28 ciudades con más de 500 mil habitantes, que incluye las tres principales metrópolis (Distrito Federal, Guadalajara y Monterrey). Esta muestra representa, aproximadamente, 70% de las áreas urbanas del país. El tipo de muestra es ____________.
2. Amplía la información de la encuesta realizada, otras preguntas que puedes plantear son:
   a) ¿Cuál es la percepción de seguridad en la escuela y sus alrededores?
   b) ¿Cuáles son los deportes preferidos por los estudiantes de tu escuela?

resiliencia. Se refiere a la capacidad de los sujetos para sobreponerse a períodos de dolor emocional y traumas.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si surge alguna confusión consulta a tu profesor.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			
Contribuí con las tareas asignadas.			
Mostré respeto y tolerancia en el trabajo en equipo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Propuso alguna pregunta de investigación para conocer algunas opiniones o características acerca de los estudiantes de su escuela.			
Colaboró en proponer alguna forma de elegir una muestra y un tipo de gráfica para representar los resultados de la investigación.			
Durante la presentación de los informes, escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lee los textos y resuelve las actividades que se plantean.

Lanzamiento de dados

El siguiente esquema representa el espacio muestral del lanzamiento de dos dados.

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

Figura 1

1. Describe cada uno de los eventos señalados con colores verde, naranja, amarillo y azul como A, B, C y D, respectivamente.

Evento A: ________________________.
Evento B: ________________________.
Evento C: ________________________.
Evento D: ________________________.

2. Señala en cada caso qué tipo de eventos (mutuamente excluyentes, complementarios e independientes) corresponden y por qué.

a) Los eventos A y B son: ____________ porque ____________
b) Los eventos A y C son: ____________ porque ____________
c) Los eventos A y D son: ____________ porque ____________
d) Los eventos B y D son: ____________ porque ____________
e) Los eventos B y C son: ____________ porque ____________

Lanzamiento de un dado y una moneda

El espacio muestral del experimento de lanzar una moneda y un dado, es:

E = {1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S, 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A }

Sean los eventos:

A: Aparezcan el número 2 o 3 con sol.

B: Aparezcan números pares con sol.

1. Escribe los casos favorables de cada evento.

A= {   }
B = {   }

2. Si A^c es el complemento del evento A, ¿cuáles son los casos favorables del evento A^c?

A^c = {   }

3. Si A^c es el complemento del evento A, entonces ¿cuál es la $P(A^c)$? Da argumentos matemáticos.

4. Supón que "cae águila en la moneda" ¿Este resultado afectará la probabilidad de que caiga "la cara con un punto" en el dado? Da argumentos matemáticos.

5. ¿Si ocurre el evento "sale un número par" afecta a la probabilidad del evento "sale un múltiplo de 3"? Da argumentos matemáticos.

Bibliotecas en Sonora

Se desea elegir al azar un municipio del estado de Sonora con la finalidad de conocer en qué condiciones se encuentran la(s) biblioteca(s) pública(s). Para ello, se consulta los datos registrado por el INEGI. De acuerdo con esta institución, en el estado de Sonora hay un total de ciento treinta y nueve bibliotecas públicas, distribuidas como se puede observar en el mapa de la Figura 2.

Municipios que cuentan con una biblioteca pública.

Municipios que tienen más de una biblioteca pública.

Fuente: http://www.inegi.org.mx/sistemas/mapatematico/Default.aspx

Figura 2

1. ¿Cuáles de los eventos siguientes son complementarios?

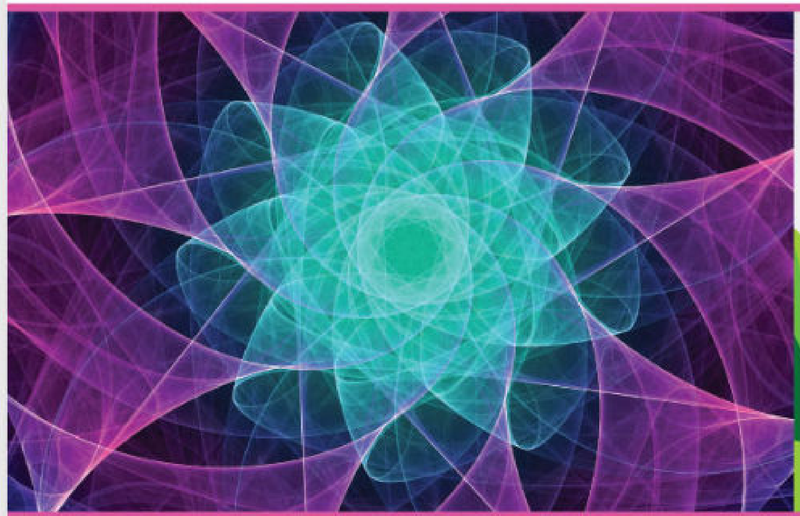
I. Elegir al azar un municipio que cuente solamente con una biblioteca pública.
II. Elegir al azar un municipio que cuente con dos bibliotecas públicas.
III. Elegir los municipios que juntos tengan 139 bibliotecas públicas.
IV. Elegir al azar un municipio que tenga más de una biblioteca pública.

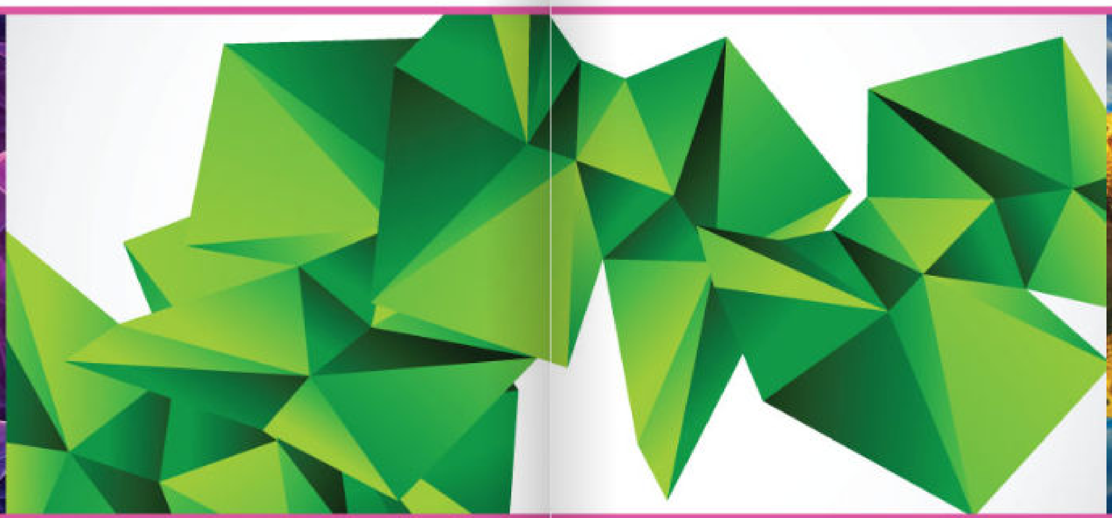
a) I y II **b)** I y IV **c)** III y I **d)** II y III

2. ¿Cuál de los siguientes incisos describe un par de eventos independientes?

a) Elegir al azar dos municipios de Sonora.
b) Elegir al azar dos municipios que cuenten con dos bibliotecas.
c) Elegir al azar un municipio que tenga una sola biblioteca y un municipio que tenga dos bibliotecas.
d) Elegir al azar un municipio entre Quiriego y Álamos, y un municipio que tenga una sola biblioteca.

Bloque 2





Aprendizajes esperados:

- Explica el tipo de transformación (reflexión, rotación o traslación) que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan.
- Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Acertijo

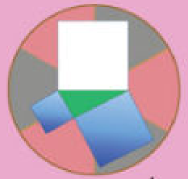
El teorema de Pitágoras dice que, en un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

En la ruleta (1) se representa dicho teorema. Los cuadrados azules contienen agua.

Si se gira la ruleta, el agua va pasando al depósito correspondiente, al cuadrado construido sobre la hipotenusa (2).

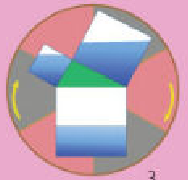
Pero aquí llega lo sorprendente, se llena antes el cuadrado (3), es decir, no pasa toda el agua… ¡y aún queda por pasar!, no mucho, pero lo suficiente para tener que dar una explicación…

¿Que explicación darías?



1

2



3

		Dosificación del docente
Lección 8. Resolución de ecuaciones	Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.	
Lección 9. Rotación y traslación de figuras	Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.	
Lección 10. Construcción de diseños	Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.	
Lección 11. Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo	Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.	
Lección 12. Teorema de Pitágoras	Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.	
Lección 13. Eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).	

Lección 8
Resolución de ecuaciones

Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

Nexos

En la lección 1, resolviste problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. En esta lección, continúa el trabajo de modelar situaciones con ecuaciones cuadráticas y resolverlas. ■

Explor@

Resuelve los siguientes problemas:

1. En el colegio Adolfo López Mateos el espacio para actividades deportivas y de recreo tiene forma rectangular cuyo largo es el doble que su ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de este espacio, si tiene el área que se indica en la Figura 1?

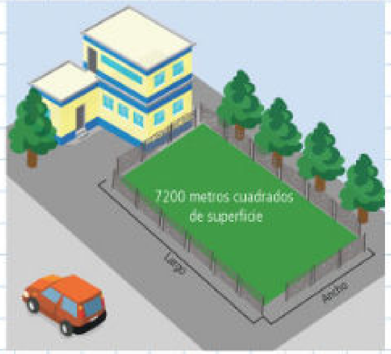


Figura 1

a) ¿Qué ecuación planteaste para relacionar el área?
b) ¿Qué tipo de ecuación es?
c) Explica, con tus palabras, lo que hiciste para resolver el problema.

2. En el colegio se desea ampliar el jardín que tiene forma cuadrada. Al aumentar 4 m por lado, la superficie aumenta en 96 m² con respecto a la original.

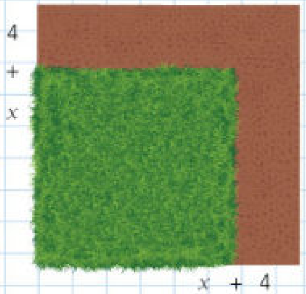


Figura 2

a) Analiza la Figura 2, ¿qué expresiones algebraicas representan el área del jardín después de ampliarlo?
b) Reflexiona sobre la información anterior y calcula cuáles serán las dimensiones del jardín después de ampliarlo.
c) ¿Cuál es la longitud inicial de los lados del jardín?
d) Verifica que los valores encontrados cumplan las condiciones del problema.

De manera grupal, con la guía de su profesor, discutan las ideas que les llevaron a elegir los procedimientos de resolución de cada uno de los problemas. Establezcan algunas conclusiones acerca de la resolución de ecuaciones cuadráticas y de su utilidad para resolver problemas en la vida cotidiana.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas:

1. Martha y Pedro deben determinar la medida de uno de los lados del patio de la escuela como se muestra en la Figura 3, pues son los encargados de comprar el listón que se colocará alrededor de éste, en el festival de clausura del fin de cursos. Lo único que saben es que el área del patio es igual a 100 veces la medida de su lado.
a) ¿Cuánto mide cada lado del patio?
b) Comprueben su resultado.

factorización. Proceso de escribir un número o una expresión algebraica en forma de producto de factores.

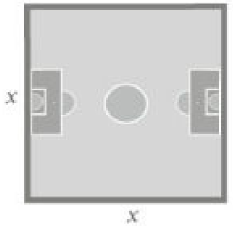


Figura 3

Para resolver el problema Martha planteó la siguiente ecuación: $x^2 - 100x = 0$.
c) ¿Qué factor común tienen los términos de la ecuación?
d) Los términos comunes en una ecuación pueden **factorizarse**. Observen las siguientes expresiones y subrayen la correcta:

$x(x - 100) = 0 \qquad x(1 - 100) = 0$

e) Como puedes observar, al factorizar la ecuación obtenemos como resultado dos factores que se están multiplicando, escríbelos: __________ y __________.
f) Reflexionen, ¿en qué casos la multiplicación de dos factores es igual a cero? Describan con sus palabras todos los casos posibles.
g) Utilizando la respuesta del inciso b, establezcan cada una de las ecuaciones correspondientes a los casos que describieron.
h) Resuelvan las ecuaciones y elijan la respuesta correcta. ¿Cuánto miden los lados del patio?
i) Verifiquen sus resultados.

2. La escuela cuenta con una alberca de forma cuadrada. El triple del área de la alberca de la escuela menos 30 veces la medida de su lado es igual a cero.

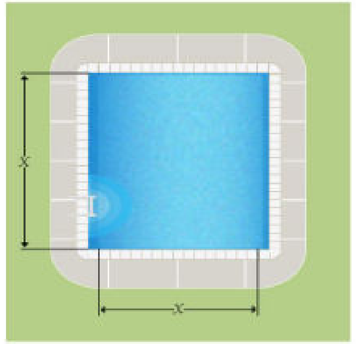


Figura 4

a) En la imagen de la alberca, ¿qué simboliza x?
b) Usando x como variable, establezcan la expresión algebraica correspondiente a la información del problema.
c) Escriban la ecuación como el producto de dos factores y resuélvanla.
d) ¿Cuánto mide cada lado de la alberca?

3. Escriban la ecuación $7x^2 - 28x = 0$ como el producto de dos factores.

a) Si se aplica la propiedad del cero, x_1 = ___________
b) Resuelvan la ecuación de la forma $ax + b = 0$ y determinen el valor de x_2.
c) Por lo tanto x_1 = _______; x_2 = _______ son las raíces de la ecuación.
d) Comprueben que los dos valores de x satisfacen a la ecuación $7x^2 - 28x = 0$.

Comparen sus respuestas y discutan cómo fue que llegaron a ellas:

- ¿Cuáles fueron los obstáculos para establecer cada una de las ecuaciones y cómo los superaron?
- ¿La ecuación que establecieron en cada caso es de la forma $x^2 + bx = 0$?
- ¿Cuáles son las dificultades a las que se enfrentaron para realizar el proceso de factorización de estas ecuaciones y cómo las enfrentaron?
- ¿Cuáles fueron sus criterios para elegir la respuesta correcta?, ¿por qué?

Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Es necesario considerar que en una ecuación de segundo grado o cuadrática puede faltar el término bx o el término independiente c. A estas ecuaciones se les llama **cuadráticas incompletas**.
Si falta el término bx, la ecuación es incompleta y tendrá la forma $ax^2 + c = 0$, ésta recibe el nombre de **cuadrática pura**.
Si falta el término independiente c, la ecuación es incompleta y tendrá la forma $ax^2 + bx = 0$. Se le llama **cuadrática mixta**.

Resuelvan los siguientes problemas:

4. El grupo de danza folclórica de la escuela va a presentar una coreografía en el salón de baile. Muchas veces han realizado presentaciones en él y saben que su largo es de 3 m más que su ancho. Si el área del salón de baile es de 70 m², ¿cuánto mide de largo y cuánto de ancho? Intenten resolver el problema con sus propios recursos y comprobar sus resultados.

Ahora resuelvan el problema utilizando el método de factorización. Para ello realicen lo que se les pide:

a) Si x representa el ancho de la pista, ¿cuál es la expresión que representa el largo?
b) Usen las expresiones del inciso a para representar el área del salón de baile.
c) Si el área del salón de baile es de 70 m², establezcan una ecuación con la expresión matemática del inciso anterior. Escríbanla.
d) Simplifiquen la ecuación para llevarla a su forma: $x^2 + bx + c = 0$
e) Factoricen la ecuación como el producto de dos binomios. Para ello, escriban todas las parejas de números cuyo producto sea –70 y de ellas elijan aquella cuya suma algebraica es 3. Con la pareja de números que seleccionaron formen los dos binomios:
$(x + \quad)$ y $(x + \quad)$
El producto de los dos binomios que obtuvieron igualado a cero es la expresión factorizada del trinomio.
f) Resuelvan la ecuación resultante igualando a cero cada binomio y despejando a x. ¿Por qué pueden hacer esto?
g) Obtuvieron dos soluciones x_1 = _________ y x_2 = ________. ¿Cuál de las dos deben elegir para calcular las medidas del salón de baile? ¿Por qué?
h) Respondan cuánto mide de largo y cuánto de ancho el salón en el que se llevará a cabo la coreografía de danza folclórica.

Comparen sus respuestas y comenten cómo fue que llegaron a ellas; luego escriban, en su cuaderno, una conclusión acerca de en qué consiste resolver una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ por factorización.

Los casos de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + bx + c = 0$ son:
Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
Trinomio cuadrado no perfecto: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$ es **factorizable en los enteros** si se pueden encontrar dos números enteros A y B, tales que:
$$x^2 + bx + c = (x + A)(x + B)$$
Donde $A + B = b$ y $AB = c$

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/hdt/materiales-educativos-digitales/ (última consulta: 17 de noviembre de 2013).
2. Accede a la liga "ver" de 3° de Secundaria, Matemáticas III, Bloque 2 que corresponde al siguiente aprendizaje esperado y realiza lo que se indica:
Utilizar ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.
3. Realiza un resumen de la información contenida y luego, realiza una exposición ante todo tu grupo.

En la cima

Resuelvan los siguientes problemas.

1. La fórmula $d = v_0t - 5t^2$ da aproximadamente la distancia en metros que recorre un objeto desde su punto de partida después de t segundos, al ser arrojado hacia arriba con una velocidad inicial (v_0). Calculen lo que se pide usando esta fórmula.

   a) La altura que alcanzará una pelota en 5 segundos si se arroja con una velocidad de 45 m/s.
   b) El tiempo que tendrá que transcurrir para que la pelota se encuentre a 45 m de donde se arrojó, con una velocidad de 50 m/s.

   Expliquen cómo obtuvieron sus respuestas.

2. En una fábrica de contenedores están diseñando un recipiente en forma de prisma cuadrangular de 2 dm de altura que tenga un volumen de 72 dm³.

   Para construir el recipiente se usará una lámina de metal de forma cuadrada, luego se cortarán cuadrados en las esquinas y, finalmente, se doblarán los bordes para formar el recipiente. ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina de metal cuya forma es cuadrada?

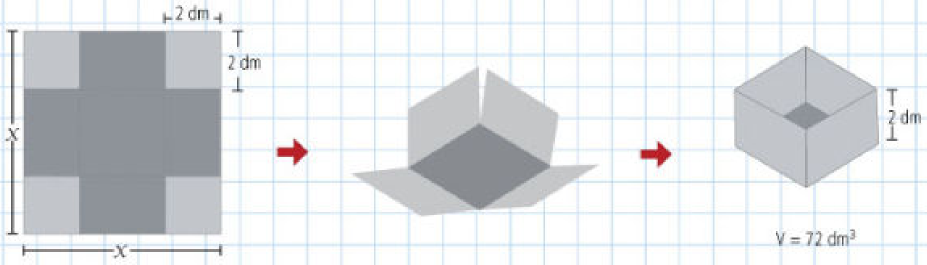


Figura 5

Comparen su respuesta con las de otros equipos, comenten cómo fue que resolvieron el primer problema, muestren sus procediminetos algebraicos. Con respecto al segundo problema, discutan qué forma geométrica tiene la base del prisma, cuál es la expresión algebraica que representa la medida de un lado de la base del prisma, cuál es la expresión algebraica que representa el área de la base del prisma y cuál es la expresión algebraica que representa el volumen y cómo fue que factorizaron la ecuación cuadrática que establecieron.

Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Destreza y estrategia

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 - 6x = 0$
   b) $x^2 + 27x = 0$
   c) $3x^2 + 5x = 0$
   d) $x^2 - 7x + 10 = 0$
   e) $(x - 2)(x + 3) = 0$
   f) $(3x - 1)(x - 5) = 0$
2. Un campo de futbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7 000 m², determina sus dimensiones.
3. La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?
4. Se quiere hacer una caja de 50 cm³ de volumen con una cartulina cuadrada. Para hacerla se cortan en las esquinas cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuánto mide el lado de la cartulina cuadrada?
5. Un triángulo tiene un área de 24 cm² y la altura mide 2 cm más que la base correspondiente. ¿Cuánto mide la altura?

Compara tu trabajo con los de otros compañeros y discutan acerca de las estrategias que cada uno utilizó para solucionar los problemas, de la importancia de aprender a modelar situaciones mediante el planteamiento de ecuaciones cuadráticas y de la utilidad de los métodos de factorización para resolverlas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé activamente en las discusiones grupales.			
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Contribuí con ideas e información.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Propuso soluciones razonables a los problemas que requerían una solución intuitiva.			
Colaboró en resolver los problemas estableciendo una ecuación cuadrática.			
Propuso alguna forma de factorizar una ecuación mixta y una completa.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 9
Rotación y traslación de figuras

Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras.

Explor@

1. Cecilia está armando en su computadora el rompecabezas que se muestra en la Figura 1, ya sólo le faltan las dos piezas de la derecha. Con el cursor puede hacer dos movimientos: girar y trasladar.

Figura 1

a) Si Cecilia desea ensamblar en el rompecabezas la pieza blanca, ¿qué función del programa le conviene usar, girar o trasladar? Explica.
b) ¿Y para ensamblar la pieza verde? Argumenta.
c) ¿Alguna vez has realizado un juego u otra actividad donde tengas que trasladar o girar objetos? Explica.

2. De acuerdo con la secuencia de imágenes, identifica si se asocia a una traslación o rotación. Responde y escribe un ejemplo.

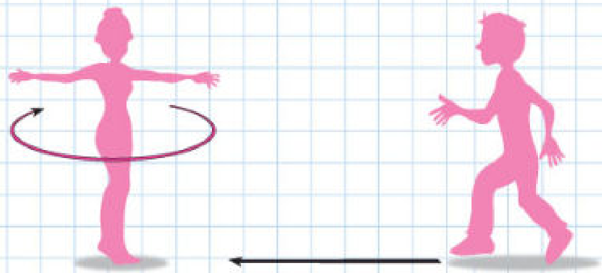


Figura 2

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en segundo grado de secundaria con respecto al tema de simetría axial o de reflexión, propiedades que se conservan en figuras originales y su simétrico te serán de utilidad para analizar propiedades de traslación y rotación de figuras. Revisa los temas mencionados para recordar lo que aprendiste.

3. En la Figura 3, al lado derecho del romboide se encuentra un espejo, ¿cómo se vería su reflejo? Descríbelo y dibújalo en el espacio en blanco.

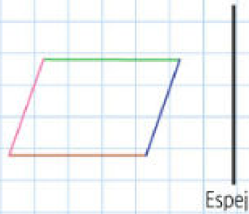


Figura 3

a) Traza una X en el lado rosa del romboide. ¿Dónde se localizaría su reflejo? Justifica tu respuesta.
b) Si en vez de reflejar el romboide lo trasladaras, ¿qué características tendría la construcción? Explica las semejanzas y diferencias entre la imagen del romboide reflejado y el trasladado.

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus libros. Revisen las respuestas y luego comenten sobre lo siguiente:

- ¿Coincidieron en sus explicaciones? ¿En qué aspectos difirieron? ¿Por qué?
- ¿Las traslaciones de un objeto son siempre en la misma dirección? ¿Qué pasa con las rotaciones, la dirección siempre es la misma?

Lleguen a un consenso grupal con la ayuda del profesor.

Tómalo en cuenta

John Spilsbury inventó los rompecabezas en 1762. Practicar su armado desarrolla la capacidad de resolver problemas.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Se aplicó una traslación al hexágono café de la Figura 4 y se generó el hexágono café claro.

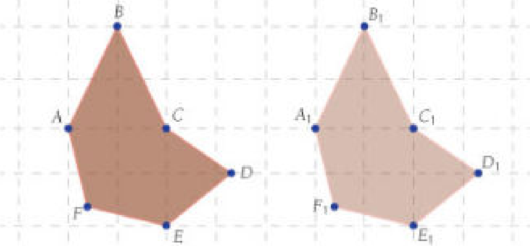


Figura 4

a) ¿Cuántos cuadros se trasladó el punto A para generar el punto A_1? ¿Hacia qué dirección? ¿Cuántos cuadros se trasladó el punto B para generar el punto B_1? ¿Hacia qué dirección?

b) Entonces, sin contarlos, ¿cuántos cuadros se trasladó y en qué dirección, cada punto del hexágono café para obtener el hexágono café claro?
c) Comprueba tu respuesta.

2. Ahora consideren como original el hexágono rojo de la Figura 5, y el hexágono rojo claro como su imagen.

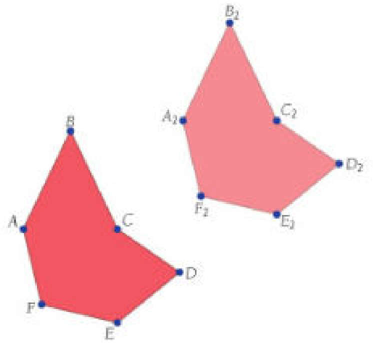


Figura 5

a) ¿Qué distancia se trasladó el punto A del hexágono original para generar el punto A_2? ¿Hacia qué dirección?
b) ¿Cómo son las distancias entre cada punto de la imagen y la original?
c) ¿Cómo son, al comparar, las figuras original y su imagen? Expliquen.
d) ¿Cómo son las medidas de los lados y de los ángulos de la figura original y la figura trasladada? Realicen las mediciones y organicen los datos en su cuaderno.
e) Finalmente, escriban en su cuaderno una conclusión sobre qué condiciones debe cumplir una figura al aplicar una traslación en el plano.

3. En la Figura 6 pueden observar que al rotar el cuadrilátero $ABCD$, con respecto al punto A, se obtiene como imagen el cuadrilátero $A'B'C'D'$.

a) ¿Cómo son la figura original y su imagen?
b) ¿En qué dirección se rotó el cuadrilátero $ABCD$ para obtener el cuadrilátero $A'B'C'D'$, en el sentido de las manecillas del reloj o en su contra?
c) Consideren el vértice B, ¿hacia qué dirección se realizó el giro para generar su imagen B'?
d) ¿Cuántos grados se giró dicho vértice con respecto al punto A para generar su imagen?
e) Por analogía, determinen cuántos grados se giró el vértice C para obtener el vértice C'.
f) Observen sus resultados y contesten: ¿cuántos grados se trasladó y en qué dirección, cada punto del cuadrilátero $ABCD$ para obtener el cuadrilátero $A'B'C'D'$? Comprueben su respuesta.
g) ¿Por qué, en este caso específico, no se puede considerar como punto de rotación del cuadrilátero rosa al punto B o al punto C para obtener la imagen $A'B'C'D'$? Expliquen.

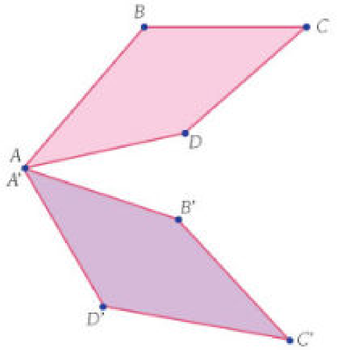


Figura 6

h) Si se considera como punto de rotación al punto D, ¿la imagen sería idéntica al cuadrilátero $A'B'C'D'$? Expliquen.
i) ¿Cómo son las medidas de los lados y ángulos de la figura original y la figura obtenida por rotación? Compruébenlo usando su regla y transportador; completen los datos que se solicitan en la Tabla 3.

Medida de	$\angle ABC$	$\angle BCD$	$\angle CDA$	$\angle DAB$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{DA}$
Original								
Imagen								

Tabla 3

j) ¿Qué propiedades se conservan al aplicar una rotación a una figura original con respecto a su imagen? Expliquen.

Reúnanse con sus compañeros y comparen sus respuestas. Luego en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común y discutan acerca de qué propiedades se conservan entre la figura original y su imagen al aplicar una traslación o una rotación en el plano.

Una trasformación en el plano generada por una **rotación** se caracteriza por:

- Desplazar la figura original (trapecio $FGHI$) hacia la derecha o hacia la izquierda con respecto de un punto (propio o externo) de acuerdo con la medida de un ángulo dado, (en este caso 120°) dicho punto es llamado centro de rotación, denotado por O.
- Los vértices de la figura original y su imagen se encuentran a la misma distancia del centro de rotación, por ejemplo $\overline{G'O}$ y $\overline{GO}$.
- La medida de los ángulos que se forman al unir dos vértices correspondientes con el punto O miden lo mismo que el ángulo de rotación, por ejemplo el ángulo FOF'.
- Cuando el ángulo de giro es de 180°, también se le conoce como simetría central.

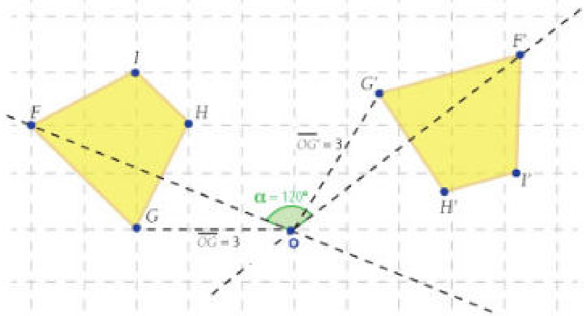


Figura 7

La **traslación** de una figura se determina por la directriz del movimiento, la cual define una distancia y una dirección que se aplica a cada uno de los puntos de la figura en cuestión.

En la cima

Respondan los siguientes planteamientos.

1. Dada la Figura 8, apliquen una traslación de manera tal que el punto A se traslade 4 cm a la derecha y 1.5 cm hacia abajo.

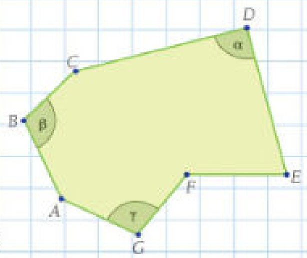


Figura 8

a) Describan el procedimiento empleado en la construcción de la imagen del heptágono irregular $ABCDEFG$.
b) ¿Cómo son los lados y los ángulos de la figura imagen con respecto de la original?
c) Unan, con segmentos de recta, los vértices correspondientes entre la figura original y su imagen, ¿cómo son los segmentos de recta trazados? Expliquen.
d) Comprueben si sucede lo mismo con las figuras de los problemas 2 y 3 de la sección "En construcción". Escriban una conclusión acerca de la trayectoria que describe una figura cuando se traslada.
e) Complementen su conclusión sobre qué condiciones debe de cumplir una figura al aplicar una traslación en el plano.

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego discutan sobre si las traslaciones se pueden aplicar en diversas direcciones y si siempre que se traslada una figura ésta sigue una trayectoria recta.

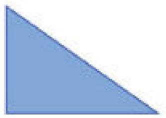
2. Copien en papel albanene la Figura 6 y rótenla 180° hacia la derecha respecto al vértice A para construir la imagen $A_1B_1C_1D_1$. Observen la figura y contesten:

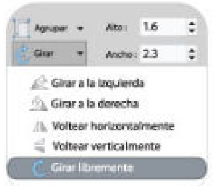
a) ¿Cómo son la figura original y la figura obtenida por rotación?
b) Si el giro de rotación con respecto al punto A se hiciera a la izquierda, ¿se tendría la misma imagen? Expliquen.
c) Ubiquen el centro de rotación en un punto fuera del cuadrilátero $ABCD$, construyan la imagen después de realizar una rotación de 45° a la derecha.
d) Comparen con las construcciones de sus compañeros, ¿qué semejanzas y diferencias distinguen? ¿Por qué?
e) Complementen su conclusión acerca de qué propiedades se conservan al rotar una figura en el plano.

Con el apoyo de su profesor reflexionen acerca de cuál es la utilidad de las transformaciones de traslación y rotación en matemáticas.

RDT

Algunos procesadores de texto que utilizas para hacer tus trabajos escolares tienen herramientas para manipular figuras. Analiza estas herramientas:





1. Abre un nuevo documento en el procesador de textos; utiliza el comando "Insertar forma" y escoge un triángulo rectángulo
2. Selecciona "Propiedades de imagen" y da clic en la función "Girar".
3. Manipula virtualmente el triángulo rectángulo al usar la función "Girar a la derecha", "Girar a la izquierda", "Girar libremente" y contesta:

¿Cuántos grados se tiene que girar para que el triángulo rectángulo quede en la misma posición? Explica.
Prueba con otras formas geométricas.
Después escribe tus conclusiones con respecto a las experiencias de usar la función "Girar".

RDT

Visita la página:
http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/transformaciones.html (última consulta: 17 de junio de 2013).

Traslada y rota las figuras que ahí se presentan. Observa el procedimiento que se realiza para transformar las figuras. Compáralo con el que tú has estado realizando. Traslada y rota las figuras tanto como desees y comprueba si las diferentes conclusiones que obtuviste acerca de las propiedades que se conservan al trasladar o rotar una figura en el plano se cumplen. Comparte tus experiencias con tus compañeros.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas. Realiza los trazos que sean necesarios para justificar tus respuestas.

1. Explica al lado de la figura qué trasformación se aplicó al cuadrilátero $JLMN$ para generar las imágenes que se muestran. Justifica su respuesta. ¿Si se continúan generando traslaciones al cuadrilátero $JLMN$, el vértice J_n coincidirá con el vértice L_n? Explica tu respuesta.

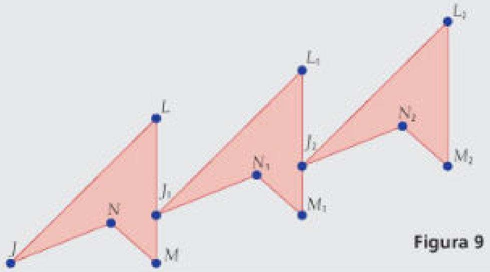


Figura 9

2. Sea el pentágono *ABCDE* la figura original. Se le ha aplicado una rotación de 90° con giro a la derecha. Identifica qué vértice es el punto de rotación en cada caso.

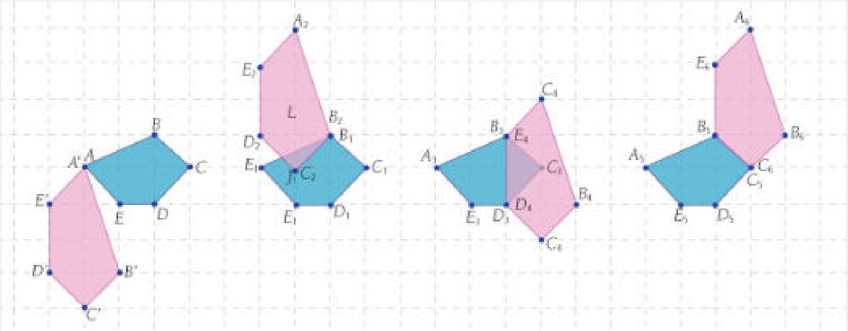


Figura 10

3. Determina la medida del ángulo de rotación de la imagen del heptágono *ABCDEFG*.

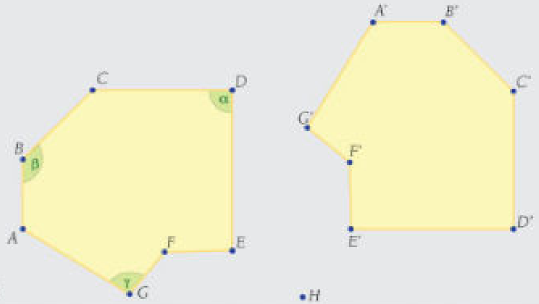


Figura 11

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Colaboré en las tareas del equipo y grupo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Usó su intuición para determinar las propiedades que se conservan al trasladar o rotar una figura.			
Contribuyó a elaborar estrategias para determinar el ángulo que una figura se rotó respecto a un punto para obtener la figura imagen que se mostraba.			
Colaboró en el análisis de las propiedades de las formas geométricas al aplicar una traslación o una rotación.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 10
Construcción de diseños

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. Andrés es el responsable del departamento de creatividad y tiene la responsabilidad de hacer una propuesta para diseñar el logotipo de la empresa en la que labora. El modelo que Andrés elaboró se muestra en Figura 1. Al momento de mostrarlo a sus compañeros, ellos le solicitaron que describiera el proceso del diseño, a lo que Andrés contestó: "Apliqué varias simetrías al trapecio *ABCD*".

   a) ¿Te satisface la explicación dada por Andrés? Explica.
   b) Con su explicación, ¿puedes construir el logotipo anterior? Justifica.
   c) ¿Qué explicación darías tú, de manera tal que sea clara y entendible?

2. Andrés mandó el archivo del logotipo al departamento de diseño. Sin embargo, al momento de construirlo, el archivo se dañó y el auxiliar de diseño intentó trazarlo nuevamente aplicando diferentes simetrías al trapecio *ABCD*. Los logotipos que obtuvo se muestran en la Figura 2. Analiza los diseños y en la Tabla 1 describe el procedimiento que se aplicó a los trapecios originales para obtenerlos.

Diseño 1 Diseño 2

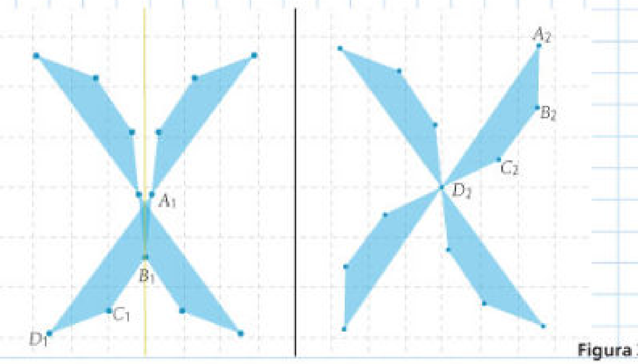


Figura 2

Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras.

Nexos

Los conocimientos que obtuviste en segundo grado de secundaria con respecto al tema de Teselados, simetría axial o de reflexión junto con los conocimientos que adquiriste en la lección anterior te serán de gran utilidad en esta lección para diseñar tus propios mosaicos y para averiguar el proceso de construcción de mosaicos ya establecidos.

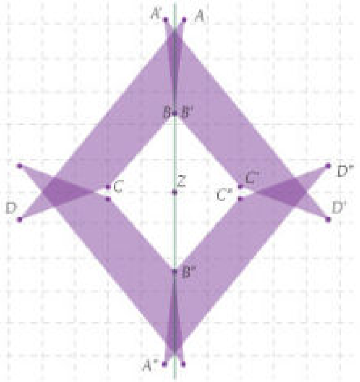


Figura 1

Diseño 1	Diseño 2

Tabla 1

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus respuestas. Luego discutan acerca de cuántos logotipos diferentes se pueden formar aplicando diversas simetrías al trapecio original del diseño de Andrés. Argumenten sus afirmaciones.

En construcción

Analicen las figuras que se forman.

1. Sea el cuadrilátero irregular $ABCD$ de la Figura 3. Tracen una recta r_1, que pase por el punto P y el vértice B. Considerando a r_1 como eje de reflexión, apliquen simetría de reflexión al cuadrilátero irregular $ABCD$ y dibujen el cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$. Tracen una recta r_2 perpendicular a r_1 en P y respecto al eje r_2 apliquen simetría axial a la figura que acaban de trazar, deben obtener una figura cerrada.

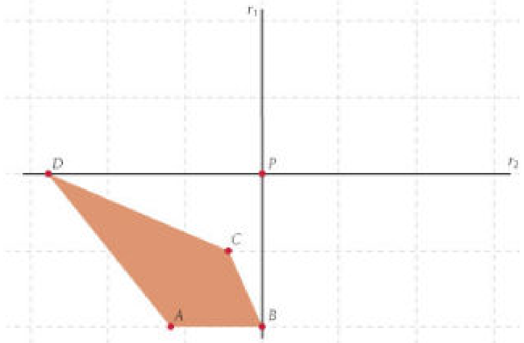


Figura 3

a) Describan el diseño que obtuvieron:

b) El diseño obtenido se generó aplicando únicamente un tipo de simetría. ¿La figura se puede construir utilizando simetría axial y simetría central? ¿Por qué?

2. Consideren nuevamente el cuadrilátero $ABCD$, si trasladan el eje de reflexión r_2 hacia al lado AB del cuadrilátero y repiten el procedimiento descrito en la actividad 1, ¿obtendrán la misma figura? Expliquen.

Comprueben su respuesta siguiendo las indicaciones dadas para descubrir el diseño que se forma en el plano de la Figura 4.

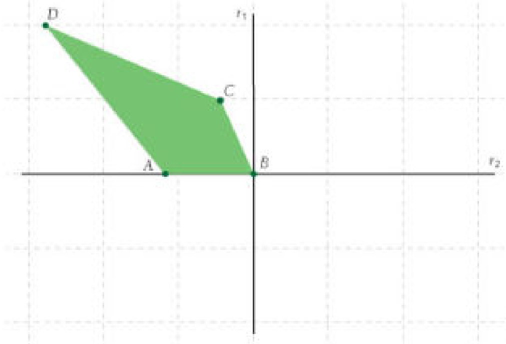


Figura 4

3. ¿Qué diseño se forma si el eje de reflexión r_2 en vez de ser perpendicular a r_1 en el punto P, es paralelo a él en el punto D? Sigan las indicaciones de la actividad 1 tomando en cuenta los cambios mencionados para analizar la figura que se forma.

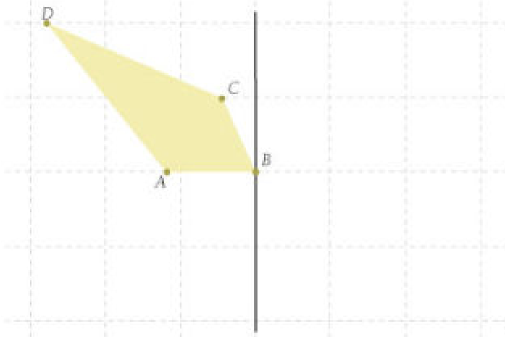


Figura 5

a) ¿Cómo cambia el cuadrilátero de la Figura 5 si se considera a r_2 paralela a r_1 y que pase por el vértice D_1 de la primera imagen? Construyan, en su cuaderno, el diseño para corroborar su análisis.

b) ¿Cómo son los diseños obtenidos al compararlos?, ¿qué diferencias y semejanzas identifican?

4. ¿Las figuras que construyeron en las actividades 2 y 3 se pueden generar al aplicar simetría de reflexión y simetría de traslación al cuadrilátero inicial? Reflexionen acerca de la afirmación y si contestaron afirmativamente propongan una serie de pasos que les permitan generar esas figuras mediante la combinación de las simetrías mencionadas. Si su respuesta es negativa, sustenten por qué no es posible.

Reúnanse con otras parejas y comparen sus respuestas. Luego, de manera grupal y con el apoyo de su profesor, identifiquen, analicen y determinen cómo se transforma una figura al aplicar una simetría, una rotación o una traslación. Pueden también anticipar cuáles fueron las transformaciones que se aplicaron a una figura inicial para obtener la figura final.

Realicen la siguiente actividad.

5. Los diseños que obtuvieron en las actividades 1, 2 y 3 se conforman por cuatro figuras, la figura inicial y tres figuras reflejadas que ustedes trazaron. Midan los lados y los ángulos de las cuatro figuras que conforman el diseño que obtuvieron en la actividad 1 y regístrenlos en la Tabla 2.

Lados (cm)				Ángulos (°)			
Cuadrilátero ABC	**Imagen 1**	**Imagen 2**	**Imagen 3**	**Cuadrilátero ABC**	**Imagen 1**	**Imagen 2**	**Imagen 3**
$\overline{AB}=$	$\overline{A_1B_1}=$	$\overline{A_2B_2}=$	$\overline{A_3B_3}=$	$\angle A=$	$\angle A_1=$	$\angle A_2=$	$\angle A_3=$
$\overline{BC}=$	$\overline{B_1C_1}=$	$\overline{B_2C_2}=$	$\overline{B_3C_3}=$	$\angle B=$	$\angle B_1=$	$\angle B_2=$	$\angle B_3=$
$\overline{CD}=$	$\overline{C_1D_1}=$	$\overline{C_2D_2}=$	$\overline{C_3D_3}=$	$\angle C=$	$\angle C_1=$	$\angle C_2=$	$\angle C_3=$
$\overline{DA}=$	$\overline{D_1A_1}=$	$\overline{D_2A_2}=$	$\overline{D_3A_3}=$	$\angle D=$	$\angle D_1=$	$\angle D_2=$	$\angle D_3=$

Tabla 2

a) ¿Cómo son las medidas de los lados?

b) ¿Cómo son las medidas de los ángulos?

c) ¿Sucede lo mismo con los lados y los ángulos de las figuras que conforman los diseños de las actividades 2 y 3?

d) Comprueben su respuesta midiendo los ángulos y los lados de los diseños de las actividades 2 y 3, y a partir de sus resultados escriban una conclusión acerca de las propiedades que se conservan entre la figura original y sus imágenes al aplicar más de una simetría o transformación en el plano.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Finalmente, escriban una conclusión sobre cómo se puede generar un diseño al aplicar dos o más simetrías, y expliquen qué sucede con sus imágenes al aplicar las transformaciones en el plano.

En la cima

Realicen lo que se pide:

1. Sea el pentágono irregular *ABCDE* y r_1 el eje de reflexión de la Figura 6. Calquen en una hoja el pentágono irregular de la Figura 6, recórtenlo y escriban el nombre de cada uno de los vértices con comillas. Coloquen su recorte sobre su cuaderno y trasládenlo horizontalmente hacia la derecha hasta que el vértice *A'* coincida con el vértice *C* de la figura original. En esa posición remarquen el pentágono *A'B'C'D'E'*, enseguida refléjenlo respecto del eje r_1 y remárquenlo nuevamente. Continúen trasladando y reflejando el pentágono *A'B'C'D'E'* para analizar el diseño que se forma.

Figura 6

Observen el diseño que obtuvieron y contesten:

a) ¿Al aplicar las transformaciones anteriores, se puede afirmar que los vértices y los lados del pentágono original se desplazan en una misma dirección, tanto en el reflejo como en la traslación? ¿Por qué?

b) ¿Cómo es la trayectoria de ambas transformaciones?

2. Dado el cuadrilátero irregular de la Figura 7 apliquen simetría axial y de rotación, y formen un diseño.

3. Dado el hexágono irregular de la Figura 7 apliquen simetría de traslación y central, de manera tal que formen un diseño.

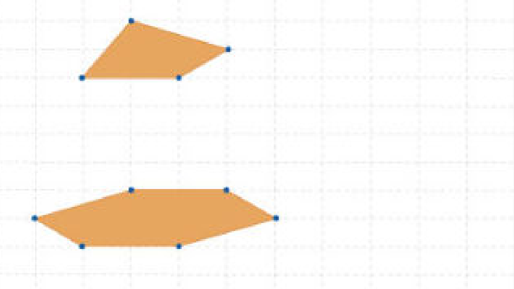


Figura 7

Socialicen sus construcciones con otros equipos, observen si construyeron los mismos diseños y en caso de ser diferentes compartan entre ustedes los procedimientos que siguieron para diseñarlos.

Destreza y estrategia

Realiza la siguiente actividad:

1. Identifica la figura original y describe los tipos de simetría que se emplearon para generar el mosaico de la Figura 8.

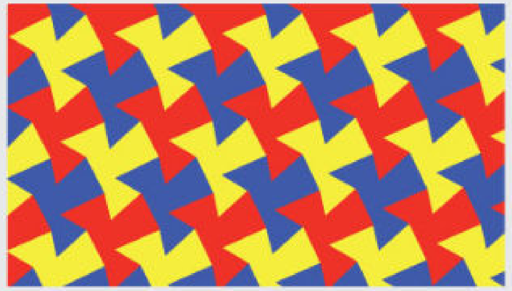


Figura 8

RDT

Visiten una de las dos direcciones electrónicas que se proponen:

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_294_g_4_t_3.html?open=activities&from=category_g_4_t_3.html

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_298_g_4_t_3.html?open=activities&from=category_g_4_t_3.html

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_300_g_4_t_3.html?open=activities&from=category_g_4_t_3.html

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_302_g_4_t_3.html?open=activities&from=category_g_4_t_3.html

(última consulta: 17 de noviembre de 2013). De acuerdo con la información de la página electrónica que eligieron, contesten en su cuaderno qué tipo de diseños se pueden generar al combinar diferentes simetrías dado un polígono regular o irregular. Escriban sus conclusiones y expliquen a sus compañeros.

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas y discutan lo siguiente:

- ¿El diseño se puede construir aplicando solamente simetría axial? Compruébenlo.
- ¿El mosaico se construyó aplicando simetría axial y de traslación? Justifiquen y comprueben.
- Escriban una síntesis de cómo se pueden construir diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación.

Compartan sus conclusiones con sus compañeros.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché y respeté las opiniones de los demás.			
Colaboré con mis compañeros.			
Realicé las actividades apropiadamente.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar el desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la construcción de los diseños al combinar una misma simetría o simetrías distintas.			
Identificó las propiedades que se conservan entre la figura original y sus imágenes al aplicar más de una simetría o transformación en el plano.			
Identificó el proceso de construcción corto o directo de figuras.			
Durante la presentación de los informes, escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 11
Relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo

Explora

Analiza los triángulos de la Figura 1. Copia en tu cuaderno la Tabla 1 y complétala con la información que se te solicita para cada triángulo.

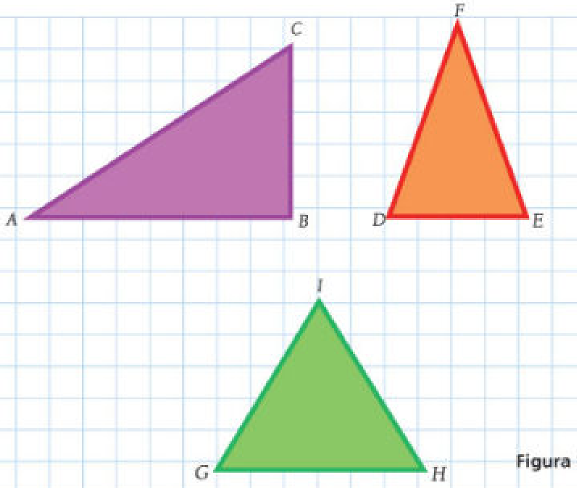


Figura 1

	Nombre	Descripción de sus lados	Descripción de sus ángulos	Ejes de simetría	Medidas y relaciones entre sus lados	Otras
Δ*ABC*						
Δ*DEF*						
Δ*GHI*						

Tabla 1

Comparen sus respuestas y complementen la información de sus recuadros.

Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.

Nexos

El triángulo es uno de los polígonos simples que más has estudiado. Tus conocimientos acerca de su clasificación, construcción y medida de área te permitirán establecer una relación muy particular entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. ■

En construcción

Resuelvan los planteamientos geométricos para responder lo que se pregunta.

1. Basándose en las medidas de los lados del ΔABC de la Figura 2, tracen un cuadrado sobre cada uno de sus lados.

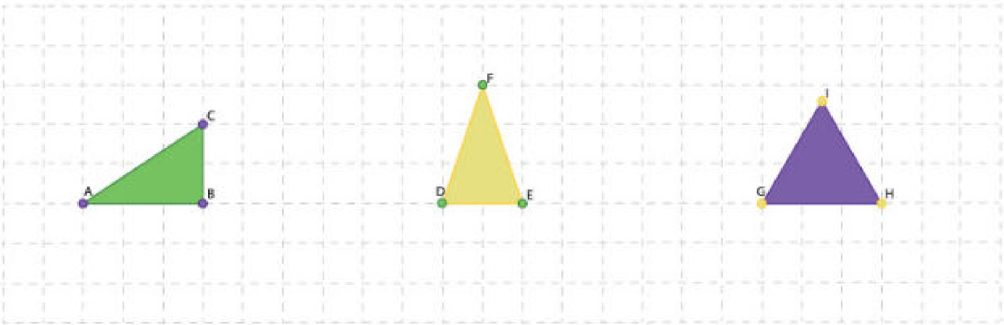


Figura 2

a) Si consideran que cada cuadrado de la retícula de la Figura 2 mide 1 cm por lado, ¿cuál es el área de cada uno de los tres cuadrados que trazaron en cada lado?

b) ¿Cómo son las medidas de las áreas entre sí?

c) Nombren como C_1 al cuadrado con mayor área y a los de menor área C_2 y C_3, en el orden que deseen.

d) Analicen detenidamente e indiquen qué relación pueden establecer entre estas medidas.

2. Repitan el procedimiento de la actividad anterior para los ΔDEF y ΔGHI de la Figura 2. Anoten la medida de las áreas obtenidas en la Tabla 2.

Cuadrado Nombre	ΔDEF Área del cuadrado	ΔGHI Área del cuadrado
C_1		
C_2		
C_3		

Tabla 2

a) Para cada triángulo analicen las medidas de las áreas de los cuadrados y establezcan qué relación existe entre ellas.

b) ¿En qué triángulo las medidas de las áreas de los cuadrados es la misma?

c) ¿En que triángulo la medida de las áreas de dos cuadrados son iguales?

Intercambien sus respuestas y argumentos con otras parejas. Luego, respondan lo siguiente:

- ¿Coincidieron en las relaciones identificadas entre las medidas de las áreas de los cuadrados que se forman en los lados de cada triángulo?, ¿en qué aspectos difirieron? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la relación entre las medidas de las áreas de los cuadrados que se forman en los lados de un triángulo rectángulo?

Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

3. Midan la longitud de los lados de los ΔABC y ΔDEF de la Figura 3. Con base en las medidas, copien los triángulos en su cuaderno y tracen un cuadrado en cada uno de sus lados.

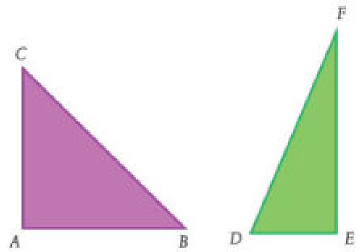


Figura 3

a) Calculen el área de cada uno de los cuadrados trazados en la Figura 3. Anoten sus resultados dentro de cada cuadrado, respectivamente.

b) Escriban la relación que se puede establecer entre la medida de las áreas de C_1, C_2 y C_3; donde C_1 es el área del cuadrado mayor, mientras que C_2 y C_3 las áreas de los cuadrados menores.

Analicen los resultados que obtuvieron en las actividades 1, 2 y 3 y escriban sus conclusiones. Después, de manera grupal, compartan sus resultados y reflexiones.

Realicen las siguientes actividades.

4. Si las longitudes de los lados del ΔABC son a, b y c, como se muestra en la Figura 4, calculen el área de cada cuadrado.

a) ¿Qué relación hay entre las áreas de los tres cuadrados?

b) Escriban la igualdad que se puede establecer entre la medida de las áreas de los tres cuadrados.

c) La igualdad que establecieron, ¿se cumplirá para todos los triángulos rectángulos sobre los cuales se traza un cuadrado en cada uno de sus lados? Justifiquen su respuesta.

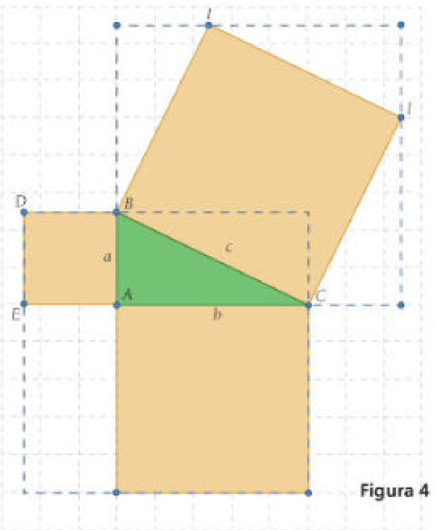


Figura 4

Socialicen sus respuestas con sus compañeros de clase. Observen si sus expresiones matemáticas coinciden y comenten acerca de si la relación que establecieron entre las áreas de los cuadrados es válida para cualquier tipo de triángulo. Escriban sus conclusiones.

Sea el ΔABC, un triángulo rectángulo cualquiera; se pueden nombrar sus lados según su medida: la **hipotenusa** corresponde al lado de mayor longitud, los lados que forman el ángulo recto son llamados **catetos**. Al cateto de mayor longitud se le denomina cateto mayor y cateto menor al de menor longitud.

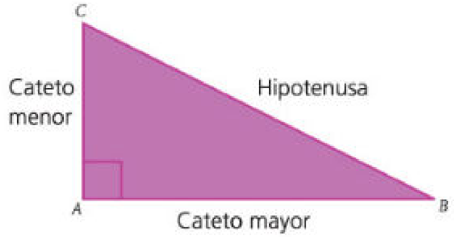


Figura 5

5. Sea el ΔABC de la Figura 6 un triángulo rectángulo isósceles, prueben usando los postulados de congruencia de triángulos que la suma de las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los catetos es igual al área del cuadrado que se construye sobre la hipotenusa.

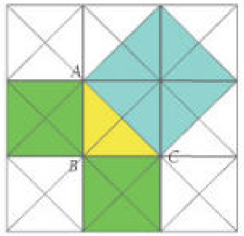


Figura 6

Complementen su conclusión sobre qué relación se establece entre la medida de las áreas de los cuadrados que se trazan sobre la medida de los catetos de un triángulo rectángulo cualesquiera y la medida del área del cuadrado que se traza sobre la hipotenusa.

RDT

En las siguientes direcciones electrónicas podrás analizar demostraciones acerca de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, estudiada en esta lección, y que se conoce como el teorema de Pitágoras. En caso de dudas, consulta a tu profesor.

http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm (última consulta: 25 de junio de 2013).
http://www.miraestevideo.com/demostracion-con-agua-del-teorema-de-pitagoras/ (última consulta: 25 de junio de 2013).
http://www.scielo.org.mx/img/revistas/ed/v20n1/html/a6anexo1.htm (última consulta: 25 de junio de 2013).

De las demostraciones de las páginas electrónicas anteriores elige algunas y realiza una exposición ante tus compañeros en la que expliques en qué consiste la demostración. Puedes proponer una demostración personal.

En la cima

1. En la Figura 7 se muestran tres triángulos, los cuales tienen sus vértices en algunos elementos el círculo. Traza sobre cada lado de los triángulos un cuadrado de manera que la longitud del lado del cuadrado sea la misma longitud que el lado del triángulo correspondiente.

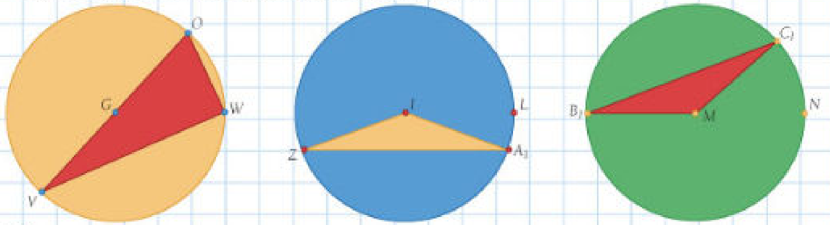


Figura 7

a) Calculen el área de cada uno de los cuadrados.
b) ¿En qué triángulo se cumple que al sumar las áreas de los cuadrados menores el resultado es igual al área del cuadrado mayor?

En grupo, lean y discutan la siguiente información:

Para todo triángulo rectángulo se cumple que la medida de las áreas de los cuadrados que se trazan sobre los catetos de un triángulo es igual a la medida del área del cuadrado que se traza sobre la hipotenusa.

Discutan acerca de la importancia y utilidad de esta relación en el análisis de las características de triángulos que han estudiado hasta el momento. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas geométricos.

1. Determina la medida del perímetro de cada triángulo. Considera que las medidas están dadas en centímetros.

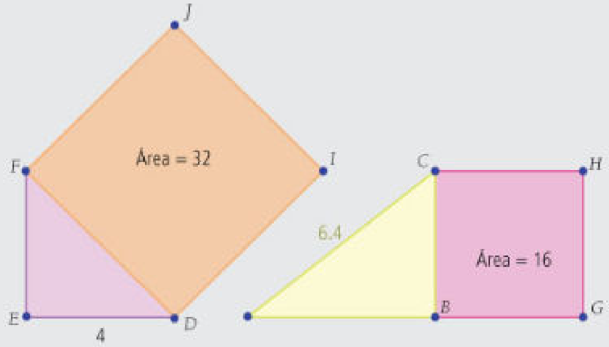


Figura 8

a) ¿Cuál es la medida del lado EF del triángulo morado?__________________
b) ¿Cómo obtuviste la medida del lado AB del triángulo amarillo?__________________

2. Se van a construir tres plazas cuadradas adyacentes a los límites de un jardín, como el que se muestra en la Figura 9.

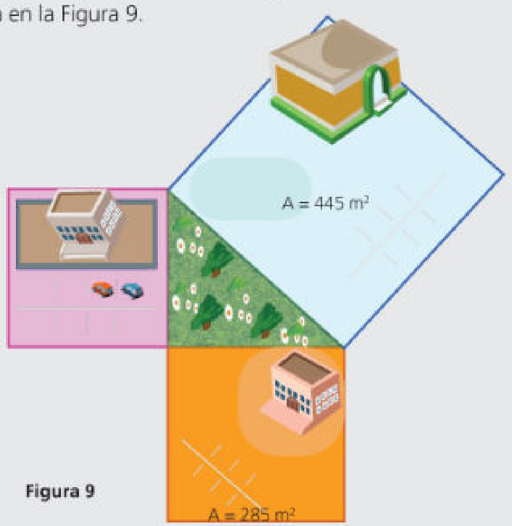


Figura 9

a) Calcula el área de la plaza rosa y la longitud de los lados del jardín.

Compara tus respuestas con otros compañeros. Expliquen ampliamente los procedimientos empleados. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor para resolverlas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto a mis compañeros.			
Realicé mis tareas responsablemente.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en el análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo.			
Aportó ideas para demostrar el teorema de Pitágoras.			
Identificó las situaciones en las que puede utilizar el teorema de Pitágoras.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 12
Teorema de Pitágoras

Explicitación y uso del teorema de Pitágoras.

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. Sea el ΔABC de la Figura 1 un triángulo rectángulo, con lados a, b y c.
   a) ¿Qué valores numéricos puedes asignarle a los lados del triángulo para que sea posible construirlo?
   b) ¿Qué relación cumplen las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo?
   c) Expresa algebraicamente esa relación, usando las literales a, b y c.

2. Si en la Tabla 1 a, b y c representan los lados de un triángulo, identifica las triadas de valores que corresponden a un triángulo rectángulo. Justifica tu elección.
   a) En tu cuaderno, construye los triángulos rectángulos que representan a las triadas que elegiste.

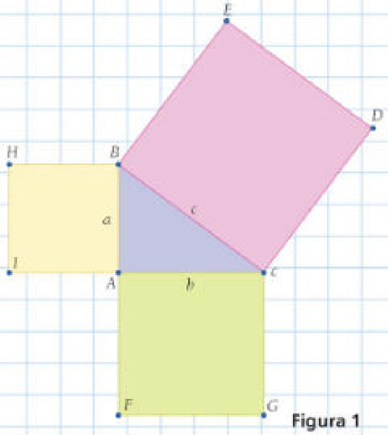


Figura 1

a	b	c	Justificación
3	4	5	
4	8	8.9	
5	6	7.8	
1	1	1.4	
6	3	6.7	

Tabla 1

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en la Lección 11 del presente libro, así como los adquiridos en grados anteriores con respecto al estudio de triángulos y sus propiedades, te permitirán comprender el teorema de Pitágoras, el cual se basa en la relación que se establece entre las medidas de las áreas de los cuadrados que se forman considerando los lados de un triángulo rectángulo.

b) Con base en la medida de los lados del triángulo, traza sobre cada lado los cuadrados correspondientes.
c) Analiza qué relación satisface las áreas de los cuadrados construidos en cada caso. Exprésala algebraicamente.

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus respuestas. Luego, reflexionen lo siguiente:

- ¿Coincidieron en sus explicaciones? ¿En qué aspectos difirieron? ¿Por qué?
- ¿Qué ventajas tiene usar expresiones algebraicas?
- ¿Existirá alguna expresión general sobre la relación estudiada?

Comparen sus reflexiones de manera grupal y en su cuaderno escriban sus conclusiones.

En construcción

1. Analicen el texto siguiente que describe la relación identificada entre las medidas de las áreas de los cuadrados que se forman en los lados en un triángulo rectángulo cualesquiera:

"En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"; esta relación se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2. En los triángulos rectángulos de la Figura 2 calculen la longitud x del lado faltante y contesten lo que se les pregunta.

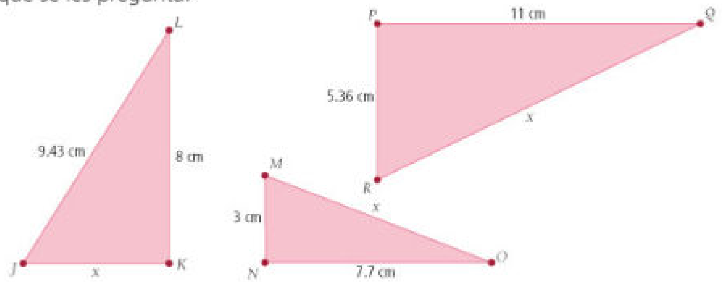


Figura 2

a) ¿Cuántos valores puede tomar x en cada caso? ¿Por qué?
b) Escriban los procedimientos empleados para hallar los valores solicitados.

Reúnanse con dos compañeros y comparen sus respuestas. Posteriormente, en grupo, discutan, con la orientación de su profesor, acerca de las ventajas, las desventajas y las dificultades que identificaron al utilizar la expresión algebraica $c^2 = a^2 + b^2$. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Analicen y resuelvan los siguientes planteamientos.

3. Un grupo de estudiantes de arquitectura tiene como proyecto final reestructurar una casa de campo con la fachada que se muestra en la Figura 3. Entre las propuestas, Juan plantea arreglar la escalera y diseñar una terraza; Beatriz propone remodelar una de las ventanas y diseñar para ella un marco rectangular formado por barras de solera y dos vidrios triangulares que simulen un vitral.

Figura 3

a) ¿Cuáles son las medidas de los vidrios triangulares que simularán el vitral?
b) Describan el procedimiento que realizaron para contestar la pregunta anterior.
c) ¿Cuál será la altura de la escalera que dará acceso a la terraza?
d) Expliquen cómo obtuvieron la respuesta anterior.

4. Hans, un turista alemán, visitó el Zócalo de la Ciudad de México y observó que la sombra que proyectaba el asta de la bandera mexicana media aproximadamente 20 m de largo. Buscó en su navegador portátil y leyó que este emblema nacional mide 50 m de altura. Enseguida tomó una foto, trazó sobre ella el triángulo ABC y se la envió a sus amigos matemáticos que tiene en Berlín, para mostrarles la bandera y retarlos a calcular la distancia de la punta del asta al extremo final de su sombra.

a) ¿Cuánto mide dicha distancia?
b) ¿Cuál es la distancia, si más tarde la sombra aumenta a 50 m de largo?
c) Escriban la relación entre la longitud de la sombra y la distancia de la punta del asta bandera al extremo final de ésta.
d) Visiten lugares cerca de su localidad, tomen fotos o dibújalos y planteen retos a sus compañeros, así como lo hizo Hans.

Figura 4

5. La Torre Mayor actualmente es el rascacielos más alto de la Ciudad de México. Se encuentra ubicada en la avenida Paseo de la Reforma, Distrito Federal, y tiene una altura de 230.4 m. A cierta hora del día proyecta una sombra de 60 m de largo. En la Figura 5 se ha trazado un triángulo rectángulo para modelar el problema y así facilitar su solución.

a) Escriban en la imagen los datos de la Torre Mayor y su sombra.
b) ¿Cuál es la distancia de la punta de la torre hasta donde llega su sombra?

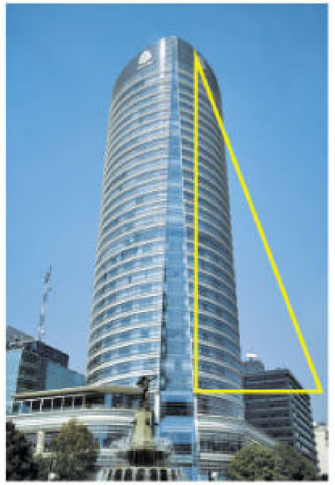


Figura 5

6. Completen la Tabla 2 en la que se han registrado las medidas de la sombra que proyecta la Torre Mayor en distintas horas del día.

Longitud de la sombra (m)	20		40	
Distancia de la punta del edificio al extremo final de la sombra (m)		232.34		240.8

Tabla 2

a) ¿Existe alguna relación entre el largo de la sombra y la distancia de la punta de la torre hasta donde llega la sombra? Expliquen.

Comparen sus conclusiones y acuerdos con la información anterior. Si hay dudas, extérnenlas con la finalidad de resolverlas.

De manera grupal, analicen la siguiente información.

El **teorema de Pitágoras** da cuenta de las medidas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo –la hipotenusa y los catetos– de la siguiente forma:

"En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces, $c^2 = a^2 + b^2$".

Discutan la ventaja de aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas. Luego, reflexionen sobre cuál es el significado de las expresiones $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

En la cima

Realicen las siguientes actividades.

1. En la Tabla 3 se han registrado los datos de los tres rascacielos más grandes de nuestro país, algunos todavía están en construcción. Analicen la información y después contesten lo que se pide.

Edificio	Lugar	Altura
Torre KOI	San Pedro Garza García, Nuevo León	267 m
Torre Mitikah	Ciudad de México	267 m
Torre Reforma	Ciudad de México	244 m

Tabla 3

a) ¿La altura del rascacielos les proporciona información acerca de qué edificio proyecta una sombra más larga a la misma hora del día? Expliquen.
b) Considerando sus argumentos anteriores, ¿qué rascacielos proyectará una sombra más larga en una determinada hora del día? Justifiquen su respuesta.
c) ¿Cómo pueden validar las respuestas dadas a las preguntas anteriores? Elaboren una conjetura.
d) Para conocer la distancia de la punta de cada rascacielos hasta el extremo final de su sombra, ¿qué datos necesitan conocer en cada caso?
e) Supongan que la proyección de la sombra para los tres rascacielos mide 180 m. Calculen la medida de la distancia de la punta de cada torre hasta el extremo final de su sombra y registren sus resultados en la Tabla 4.

Torre KOI	Torre Mitikah	Torre Reforma

Tabla 4

2. Jacinto se dedica a la compra y venta de maderas preciosas. Para estimar el precio de un tronco de madera de cedro Jacinto necesita conocer su volumen; para lo cual diariamente calcula, de manera aproximada, el diámetro de los troncos que llegan a su aserradero. Observen la Figura 6 y contesten:

a) Si la medida de un lado del cuadrado amarillo es de 90 cm, ¿cuál es la medida del diámetro del tronco en metros?
b) Si la medida de un lado del cuadrado amarillo es de 40.7 cm, ¿cuál es la medida del diámetro del tronco?


Figura 6

Socialicen sus respuestas y procedimientos para resolver los problemas anteriores. Registren en su cuaderno sus acuerdos basados en la utilidad de aplicar el teorema de Pitágoras en problemas geométricos.

Relaciónalo con...

Educación ambiental para la sustentabilidad. La actividad forestal es de gran importancia para restaurar y volver productivas las áreas deforestadas y degradadas. Reflexionar sobre nuestros hábitos de consumo, que son una de las causas de deforestación, es una forma de contribuir en la mejora del medio ambiente.

RDT

Visita la página electrónica

http://platea.pntic.mec.es/~jalonso/mates/pitagoras.swf (última consulta: 25 de junio de 2013).

1. Explora la sección "Presentación" y responde:

a) ¿Quién fue Pitágoras de Samos?

b) ¿Qué significado estaba asociado al termino *hipotenusa*?

c) ¿Y al término *cateto*?

2. Explora la sección "Una sencilla comprobación", realiza la demostración y explica con tus propias palabras en qué consiste la demostración de "Disección de Perigal".

3. Bajo la coordinación de tu profesor, explora las demostraciones rigurosas, por ejemplo la tradicional, si hay dudas coméntalas en clase para ser aclaradas.

Destreza y estrategia

En los siguientes problemas realiza los trazos que sean necesarios para justificar tus respuestas.

1. La Figura 7 representa la distribución de un terreno preparado para la reforestación de árboles. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado interior?

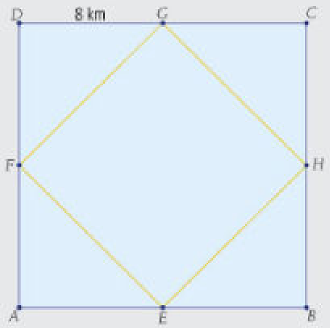


Figura 7

2. Determina la medida de la altura de cada uno de los triángulos que se muestran. Las medidas están dadas en centímetros.

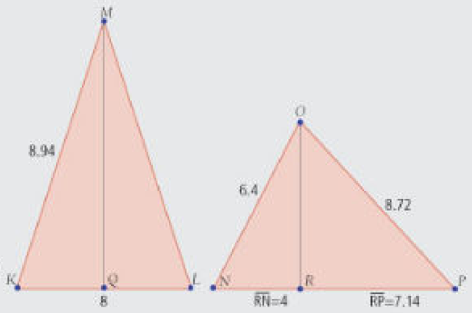


Figura 8

3. Para las imágenes de las Figuras 9 y 10 plantea un problema que pueda resolverse aplicando el teorema de Pitágoras.

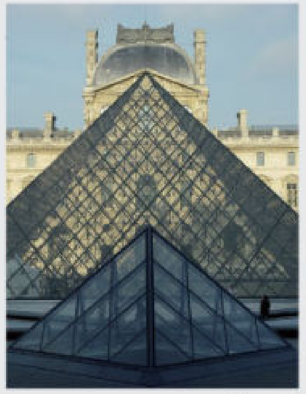


Figura 9

Figura 10

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas y verifiquen que en sus planteamientos sea necesario el uso del teorema de Pitágoras.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé en las discusiones de equipo y grupo.			
Escuché y respeté las opiniones de los demás.			
Colaboré con mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero, para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Participó en la explicitación del teorema de Pitágoras.			
Utilizó correctamente el teorema de Pitágoras para resolver los problemas planteados.			
Supo cómo obtener las diferentes expresiones algebraicas que se desprenden del teorema de Pitágoras y comprende sus significados.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 13
Eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Nexos

En la lección 6 del bloque anterior analizaste las características de eventos complementarios, eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. Retomar esos contenidos te será de utilidad para desarrollar con éxito la presente lección.

Explora

La ruleta de la Figura 1 posee un total de 38 números, los que van desde el 00 pasando por el 0 hasta el 36.

Figura 1

1. Si se hace girar la ruleta y se lanza en ella una bolita, contesta:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en 00?

b) ¿Cuántos números menores que 10 hay en la ruleta?_______. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en un número menor que 10? _______________.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en un número múltiplo de 2?

d) Si 0 es un número par, entonces ¿cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en un número impar?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita caiga en un número que no sea impar?

f) ¿El evento "que caiga la bolita en un número que no sea par" es complementario del evento "que la bolita caiga en un número par"?

Con la guía del profesor comenten cuál de los incisos se les dificultó más y cómo decidieron resolverlo. Compartan sus experiencias acerca de otros fenómenos aleatorios que conozcan y cómo calcularon su probabilidad.

En construcción

Relaciónalo con...

Educación financiera y del consumidor. Al adquirir un bien o servicio, se tiene el derecho de solicitar información y asesoría que permita el uso adecuado y eficiente del mismo.

Analicen cada uno de los siguientes planteamientos y respondan lo que se pide.

1. Al hacer una llamada telefónica a una tienda departamental para hacer alguna aclaración y esperar que contesten, existen tres posibles resultados:
   A: La llamada es respondida por la contestadora automática.
   B: La llamada es respondida por un agente.
   C: La llamada no es respondida.

Debido a las quejas que han recibido de los clientes, el gerente de la tienda departamental ordenó realizar un estudio estadístico para determinar qué es lo que está fallando en el sistema de comunicación telefónica. Los resultados fueron los siguientes:
De cada 100 llamadas que reciben, 50 llamadas son respondidas por la contestadora; 30 son respondidas por un agente y 20 no son respondidas por fallas en el sistema.

a) Con base en los datos, calculen las probabilidades de los tres eventos:
$P(A)$ = ___________ $P(B)$ = ___________ $P(C)$ = ___________

b) ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer una llamada a la tienda departamental, ocurra el evento A o el evento B? El evento "Ocurra A o B" se representa simbólicamente $A \cup B$.
$P(A \cup B)$ = _________

d) ¿Qué relación hay entre $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup B)$? Escriban la igualdad que los relaciona.

Basándose en la información proporcionada, describan otra pareja de eventos mutuamente excluyentes y calculen la probabilidad de que suceda uno o el otro.
Comparen sus resultados de los dos incisos anteriores y escriban una conclusión.

2. Gabriel ha decidido vender artículos por catálogo en su tiempo libre para reunir el dinero suficiente y comprarse una bicicleta. Si un vendedor de artículos por catálogo, en cada visita que hace a un cliente potencial, tiene una probabilidad 0.6 de "hacer una muy buena venta", una probabilidad de 0.2 de "hacer una venta regular", 0.1 de "concertar una nueva cita" y 0.1 de "no lograr ninguna venta con dicha visita".

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita haga una venta (muy buena o regular)? Escriban la respuesta en forma simbólica: ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita concierte otra cita o no logre ninguna venta? Escriban la respuesta en forma simbólica: ____________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una visita no logre una muy buena venta? Escriban la respuesta en forma simbólica: ____________________

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros y discutan cómo calcularon la probabilidad de los incisos anteriores y si en cada uno los dos eventos son mutuamente excluyentes.

Resuelvan los siguientes problemas.

3. Se tiene una urna con 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se saca una bola y se observa el número obtenido. De acuerdo a la información analicen y contesten lo que se pide.

a) Describan el espacio muestral.

b) Escriban delante de cada uno de los siguientes eventos los elementos que los forman.

A: Obtener un número par.

B: Obtener un número múltiplo de 3.

C: Obtener un número impar.

c) A continuación indiquen si cada par de eventos son mutuamente excluyentes o no y justifiquen su respuesta.

Par de eventos	¿Mutuamente excluyentes? Sí/No	Justificación
A y B		
A y C		
B y C		

Tabla 1

d) Teniendo en cuenta los eventos definidos en el punto anterior, calculen las probabilidades de los eventos A, B y C:

$P(A)$ = ______ $P(B)$ = ______ $P(C)$ = ______

e) Si se simboliza con $A \cup B$ el evento "ocurre A u ocurre B", con $A \cup C$ el evento "ocurre A u ocurre C", etcétera; calculen las siguientes probabilidades:

$P(A \cup B) =$ $P(A \cup C) =$ $P(B \cup C) =$

f) ¿Cuál es la relación de las probabilidades de los incisos anteriores con $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$?

4. El equipo de Claudia, Diego y Valeria hicieron lo siguiente para resolver el ejercicio anterior:

Para calcular $P(A \cup B)$ determinaron que el espacio muestral está formado por 10 números:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Luego determinaron los elementos del evento A y los del evento B.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{3, 6, 9\}$

Para calcular $P(A \cup B)$ sólo agregaron al evento A, los números de B que no estaban en A.

$P(A \cup B) = P(\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\})$

Concluyeron que como el conjunto $A \cup B$ tiene 7 elementos y el espacio muestral 10 elementos, entonces:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{10} = 0.7$$

a) ¿Es correcto el procedimiento del equipo de Claudia, Diego y Valeria? Justifiquen su respuesta.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas, comenten cuál es la condición que deben cumplir los eventos para que se cumpla que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Con ayuda de su maestro, organicen un debate para llegar a un consenso sobre las respuestas correctas.

Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

En la cima

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Con relación al problema 1 de la sección "En construcción" escriban todas las posibles parejas de eventos que se pueden formar con los eventos A, B y C.

a) ¿Cualquier pareja formada con esos eventos son mutuamente excluyentes? Argumenten.

b) ¿Los eventos A, B y C son mutuamente excluyentes entre sí? Justifiquen su respuesta.

c) Si su respuesta es afirmativa, ¿cuál consideran que debe ser la probabilidad de la unión de los tres eventos? Justifiquen ampliamente su respuesta y escriban su resultado.

Dado un experimento aleatorio, si A y B son dos eventos **mutuamente excluyentes** de dicho experimento, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Consideren el experimento de lanzar un volado, indiquen con "A" el resultado "caer águila" y con "S" el resultado "caer sol".

a) Si se repite el experimento dos veces, es decir, lanzar una moneda dos veces, enlisten enseguida todos los resultados posibles:

b) En la Tabla 2 se describen tres eventos, escriban en la segunda columna los elementos de cada evento.

Evento	Elementos del evento	Evento complementario	Elementos del evento complementario
A: el evento de que resulten 0 águilas		$A^c =$	
B: el evento de que resulte 1 águila		$B^c =$	
C: El evento de que resulten 2 águilas		$C^c =$	

Tabla 2

c) En la tercera columna describan el evento complementario a cada uno de los eventos.

d) En la última columna escriban los elementos de cada evento complementario.

e) Calculen la probabilidad de cada evento y de su complemento:

$P(A) =$ $P(B) =$ $P(C) =$

$P(A^C) =$ $P(B^C) =$ $P(C^C) =$

f) Reflexionen, ¿qué relación hay entre la probabilidad de un evento y su complementario?

g) Ofrezcan argumentos para establecer la veracidad de la siguiente proposición: Un evento A y su complementario A^c satisfacen que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Reúnanse con otros compañeros y comparen sus respuestas. Con ayuda del profesor lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Escriban sus conclusiones en sus cuadernos.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica y analiza los primeros ocho apartados.
http://www.monografias.com/trabajos32/teoria-probabilidades/teoria-probabilidades.shtml
(última consulta: 25 de junio de 2013).
2. Compara la información que se da en los distintos apartados con lo tratado en esta lección, elabora un resumen de los conceptos que consideres importantes y realiza una exposición ante todo tu grupo.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Con relación al problema 3 de esta lección, argumenten si la pareja de eventos A y B, B y C no son mutuamente excluyentes.
2. Se tienen dos dados, uno azul y otro rojo, que tienen sus caras marcadas con puntos del uno al seis. El experimento consiste en lanzar simultáneamente los dos dados. Los resultados posibles del experimento son parejas de números en los cuales el primero es el número de puntos del dado rojo y el segundo del azul. Completa la Tabla 3.

		DADO AZUL					
		1	2	3	4	5	6
DADO ROJO	1	1,1					
	2		2,2				
	3						
	4						
	5				5,4		
	6					6,5	

Tabla 3

a) ¿Cuántos resultados posibles tiene el experimento?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cada uno de ellos?
c) Anota los resultados que hacen falta en la Tabla 4.

Evento	Resultados posibles	Probabilidad
A= "La suma es 3"		
B = "La suma es 7"	6	$P(B) = \frac{6}{36}$
C = "La suma es 10"		
D = "La suma es 3 o 10"		
E = "La suma es mayor que 10 múltiplo de 4"		

Tabla 4

d) ¿Qué evento tiene mayor probabilidad?
e) ¿Qué evento tiene menor probabilidad?
f) Formula un evento compuesto por dos eventos que sean mutuamente excluyentes.
g) Formula un evento compuesto por dos eventos que NO sean mutuamente excluyentes.

3. Se lanza un dado y se observa el número de la cara superior cuando queda en reposo. Analiza los siguientes eventos:
A: Obtener el número 2.
B: Obtener un número 1, 5 o 6.
C: Obtener un número mayor que 4.
a) Describe los elementos de los eventos A, B y C, y calcula la probabilidad de cada uno.
b) Argumenta si al realizar el experimento pueden ocurrir ambos eventos a la vez.
   - Eventos A y B.
   - Eventos A y C.
   - Eventos B y C.
c) Formula dos nuevos eventos compuestos que sean mutuamente excluyentes.
d) Formula otros dos nuevos eventos compuestos que NO sean mutuamente excluyentes.

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de los resultados.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Trabajé en equipo.			
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la resolución de los problemas estableciendo si los eventos eran mutuamente excluyentes.			
Propuso alguna forma de calcular la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes y de dos eventos complementarios.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lee los textos y resuelve las actividades que se plantean.

Las artes visuales

Las transformaciones geométricas (simetría axial y central, rotación y traslación) están muy presentes en diversos contextos de la vida cotidiana por ejemplo en las artes visuales. Se consideran todas las que implican percepciones visuales. Por ejemplo, la Figura 1 es un teselado que combina distintas transformaciones geométricas.

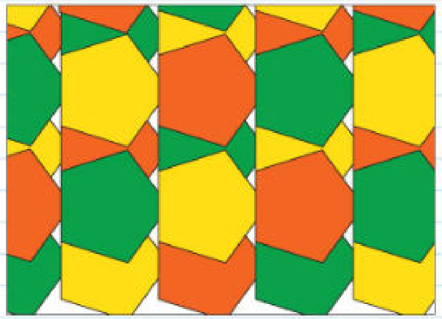


Figura 1

1. Describe cuáles son las transformaciones geométricas que se usan en la imagen, colorea un ejemplo de cada tipo y nómbralas.

2. Escribe qué tipos de transformaciones geométricas cumplen las siguientes propiedades:

   - Un punto se transforma en otro punto. ____________
   - Una recta se transforma en una recta no paralela ________
   - Un segmento se transforma en un segmento no paralelo e igual. ____________
   - Un ángulo se transforma en un ángulo igual. ________

3. Analiza la relación que existe entre las figuras geométricas.

¿Qué teorema representa la relación de las figuras? Da argumentos matemáticos.

4. En la Figura 3 todos los triángulos rectángulos son isósceles y el lado x es igual a la unidad.

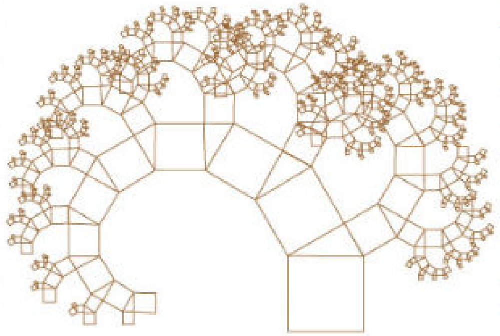


Figura 2

¿Cuánto miden los catetos x_1 y x_2? Registra tus operaciones.

Torres Petronas

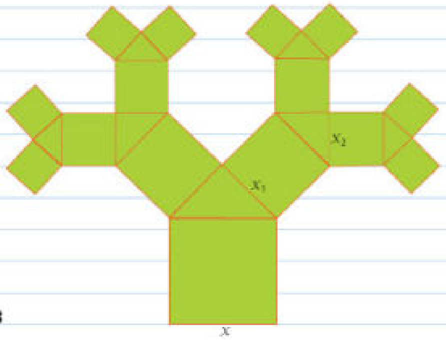


Figura 3

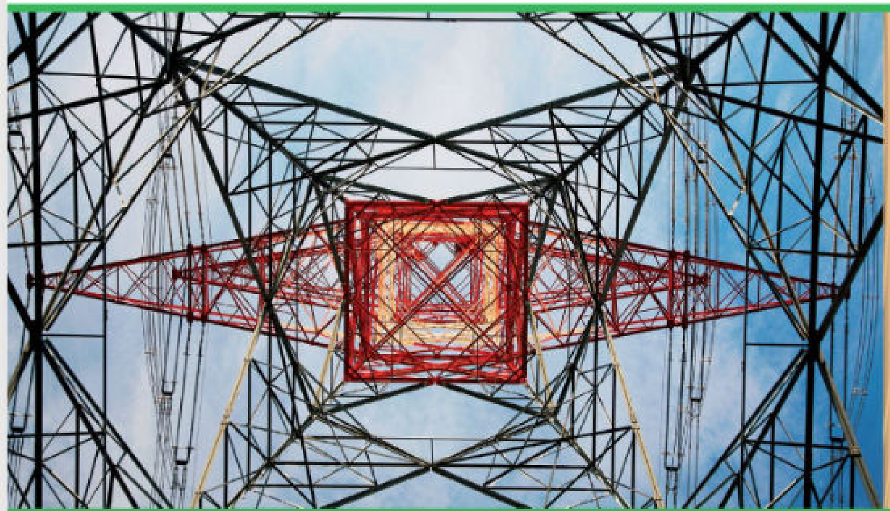
Las Torres Petronas de Malasia son actualmente el séptimo edificio más alto del mundo, con 452 m de altura. Las torres se encuentran unidas por un puente entre los pisos 41 y 42, cuyo soporte lo forman unas vigas de hormigón en forma de V invertida que se encuentran fijas en el piso 29, como se puede observar en la Figura 4.

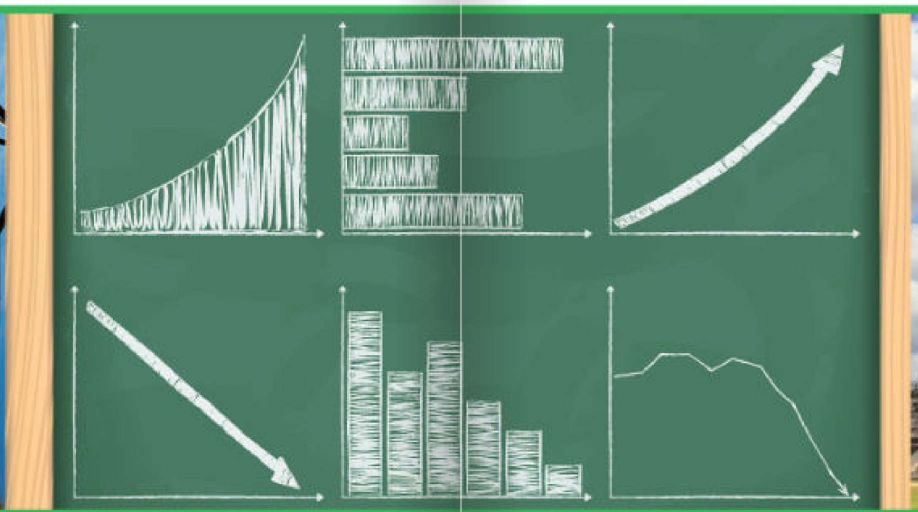
Figura 4

1. Si la altura de cada piso es de aproximadamente 4.2 m, ¿a cuántos metros debajo del puente se encuentran fijas las piernas del soporte? Registra tus operaciones.

2. La separación entre las torres es de 48 m y la altura de cada piso es de aproximadamente 4.2 m, ¿cuál es la longitud de las vigas de soporte? Registra tus operaciones.

Bloque 3





Aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente

Acertijo

El tren

El tren de Rocío sale a las diez en punto. Si va a la estación caminando, a una velocidad de 4 km/h, llega cinco minutos tarde. Si va corriendo, a 8 km/h, llega con diez minutos de adelanto. ¿A qué distancia está Rocío de la estación?

		Dosificación del docente
Lección 14. Fórmula general	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.	
Lección 15. Problemas de congruencia y semejanza	Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	
Lección 16. Teorema de Tales	Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.	
Lección 17. Figuras homotéticas	Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.	
Lección 18. Gráficas de funciones cuadráticas	Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.	
Lección 19. Gráficas de secciones rectas y curvas	Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.	
Lección 20. Eventos independientes	Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).	

Lección 14
Fórmula general

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.

Nexos

En las Lecciones 1 y 8 del presente libro, resolviste problemas que implicaban plantear una ecuación de segundo grado y los solucionaste por factorización, realizando operaciones inversas o por métodos personales según requería el tipo de ecuación que modelaba el problema. En esta lección, continuarás aprendiendo acerca de la resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas.

Explora

Resuelve los siguientes problemas.

1. La altura de la lámina de aluminio de la Figura 1 es 2 m menor que la longitud de su base. Si el área de la lámina es de 12 m^2. ¿Cuánto miden su base y su altura?

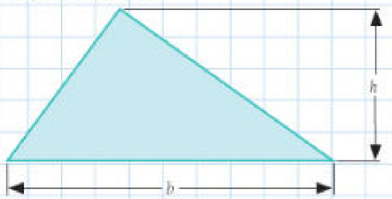


Figura 1

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la altura?
b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el producto de su base por su altura?
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la lámina?
d) Resuelve la ecuación y da respuesta al problema.

2. En la Figura 2 el largo de una lámina de aluminio rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica.

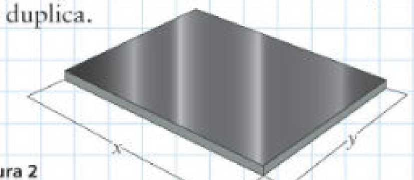


Figura 2

a) Expresa algebraicamente el siguiente enunciado: "El largo de la lámina de aluminio rectangular es 3 m mayor que el ancho"
b) Escribe la expresión algebraica que representa el área de la lámina.
c) Escribe la expresión algebraica que representa lo siguiente: "Si el ancho aumenta 3 m y el largo 2 m, el área se duplica."
d) ¿La expresión anterior es la ecuación que modela el problema? ¿Por qué?
e) Resuelve la ecuación y determina las dimensiones de la lámina rectangular.

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Muestren entre ustedes las ecuaciones cuadráticas a las que llegaron en cada caso; si plantearon ecuaciones distintas, analicen que sean equivalentes. Discutan acerca de los métodos que utilizaron para resolverlas. En caso de haber utilizado métodos diferentes, identifiquen las ventajas y las desventajas de los métodos utilizados.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas:

1. Considerando el problema 2 de la sección "Explora", si x representa el largo original de la lámina y y representa el ancho original, escriban una ecuación que represente el enunciado "El largo de una lámina de aluminio rectangular es 3 m mayor que el ancho".

a) Siguiendo con la notación anterior, ¿cuáles son las expresiones algebraicas que representan cada una de las siguientes afirmaciones?:
"El largo aumenta 2 m":
"El ancho aumenta 3 m":
"El área se duplica":
b) Escriban la igualdad que relaciona las expresiones anteriores.
c) Al realizar las operaciones y simplificar la igualdad anterior, ¿cuál es la ecuación que resulta de la forma $ax^2 + bx + c = 0$?

2. El papá de Claudia desea hacer el marco de un espejo rectangular con un listón de madera sin que le sobre ni le falte material. El largo del listón de madera se indica en la Figura 3:

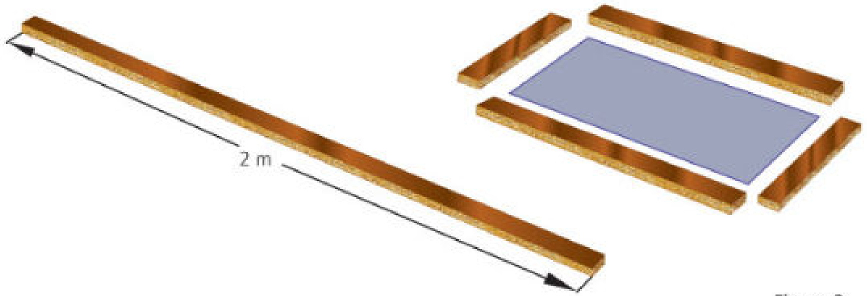


Figura 3

a) Si el espejo tiene una superficie de 21 dm^2 y el ancho es 4 dm menos que el largo, ¿de qué longitud debe cortar cada una de las cuatro piezas?
b) Representa con x el largo y con y el ancho, luego escribe una ecuación que represente el área del espejo y otra ecuación que represente el perímetro.
c) Despejen a y en la ecuación del área y sustitúyanla en la ecuación del perímetro y simplifiquen. ¿Su resultado es equivalente a alguna de las siguientes ecuaciones? En cado que no lo sea, verifiquen sus operaciones.

$$2x^2 - 20x + 42 = 0 \text{ ó } x^2 - 10x + 21 = 0$$

d) Resuelvan la ecuación y den respuesta al problema.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros. Con la guía de su profesor discutan lo siguiente:

- ¿Obtuvieron las mismas respuestas?
- ¿Cuál fue la ecuación cuadrática a la que llegaron en cada caso?
- En el caso del problema 2, ¿llegaron a que la ecuación del área es $xy = 21$ y que la del perímetro es $2x + 2y = 20$? Al realizar lo que se indica en el inciso c, ¿llegaron a establecer la ecuación $2x^2 - 20 + 42 = 0$? ¿Cómo resolvieron esta ecuación?

- De los dos valores que determinaron, ¿qué valor de x tomaron en cuenta para dar respuesta a cada problema?

3. Analicen la ecuación $x^2 - 12x - 28 = 0$ y resuélvanla en su cuaderno por el método de factorización.

a) ¿Cuáles son los dos binomios que resultan?

$(\quad)(\quad) = 0$

b) Escriban las dos soluciones de la ecuación:

$x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

c) Comprueben que, efectivamente, los dos valores de x que determinaron satisfacen a la ecuación. Luego, analicen la siguiente información:

Una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede resolver con la fórmula conocida como **fórmula general**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a \neq 0$ representa el **coeficiente** del término cuadrático, b es el coeficiente del término lineal y c es el término independiente.

g **coeficiente** Es el factor numérico que multiplica a la variable de un monomio.

d) De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles son los valores de a, b y c que representan estas literales en la ecuación $x^2 - 12x - 28 = 0$?

e) Escriban los valores de a, b y c en los recuadros correspondientes y realicen las operaciones que se indican.

a = $\square$
b = $\square$
c = $\square$

$$\longrightarrow x = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} = \frac{-\square \pm \square}{\square} \quad x_1 = \square \quad x_2 = \square$$

f) ¿Los valores de x_1 y x_2 a los que llegaron son los mismos que llegaron por factorización?

4. Sustituyan en los recuadros en blanco los datos correspondiente para resolver mediante la fórmula general las ecuaciones de los incisos a y b que corresponden a los problemas 1 y 2 de la sección "Explora".

a) $h^2 + 2h - 24 = 0$

a = $\square$
b = $\square$
c = $\square$

$$\longrightarrow h = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} = \frac{-\square \pm \square}{\square} \quad h_1 = \square \quad h_2 = \square$$

b) $y^2 - 2y - 15 = 0$

a = $\square$
b = $\square$
c = $\square$

$$\longrightarrow y = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} = \frac{-\square \pm \square}{\square} \quad y_1 = \square \quad y_2 = \square$$

Al terminar, comparen sus resultados con los resultados que obtuvieron anteriormente, ¿son iguales? Argumenten.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas, analicen los términos y las operaciones que intervienen en la fórmula general.

5. El largo de un terreno rectangular es 18 m mayor que el ancho, si su área es igual a 360 m², ¿cuáles son las medidas del terreno?

a) Modelen en la Figura 4, las características del terreno.

Figura 4

b) Planteen una ecuación que represente la situación del problema y resuélvanla por fórmula general guiándose por los recuadros de abajo.

a = $\square$
b = $\square$
c = $\square$

$$\longrightarrow x = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} = \frac{-\square \pm \square}{\square} \quad x_1 = \square \quad x_2 = \square$$

6. Analicen los problemas anteriores para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática?
b) La fórmula general incluye el símbolo ±, ¿cuál es su función?
c) ¿Es posible calcular la raíz cuadrada a cualquier número? Justifiquen.
d) Entonces, ¿siempre se obtendrán dos soluciones para la ecuación cuadrática? Argumenten.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Posteriormente comenten acerca de las ventajas y las desventajas, que respecto de otros métodos, tiene el resolver ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general.

En la cima

Resuelvan las siguientes actividades:

1. En la fórmula general para resolver las ecuaciones de segundo grado, el radicando $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante y se simboliza con la letra griega Δ. El número de soluciones de la ecuación de segundo grado depende del signo de Δ y se puede determinar incluso antes de resolver la ecuación.

a) Completen la Tabla 1 y contesten lo que se pregunta.

Ecuación cuadrática	Solución por fórmula general	Valor de Δ b2 – 4ac	Solución
$x^2 - x - 6 = 0$	$x = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} =$		$x_1 =$ $x_2 =$
$-x^2 + 6x - 9 = 0$	$x = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} =$		$x_1 =$ $x_2 =$
$x^2 - x + 1 = 0$	$x = \frac{-\square \pm \sqrt{\square^2 - 4\cdot\square\cdot\square}}{2\cdot\square} =$		$x_1 =$ $x_2 =$

Tabla 1

b) Si el discriminante es mayor que cero, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática?

c) Si el discriminante es menor que cero, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática?

d) Si el discriminante es igual a cero, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática?

De acuerdo con sus respuestas escriban en su cuaderno una conjetura acerca del signo del discriminante y el número de soluciones que posee una ecuación de segundo grado.

2. Averigüen, sin resolver, el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$	d) $2x^2 - 3x = 1$
b) $-4x^2 + 1 = 0$	e) $x - 3x^2 = 1$
c) $x^2 - 5x = 0$	f) $x^2 - 13x = -36$

Tabla 2

Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas. Después comenten entre ustedes acerca de la utilidad de la propiedad del discriminante y pidan a su profesor les asesore acerca de lo que significa que la ecuación de segundo grado no tenga solución.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica: http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas-solucionador.html (última consulta: 26 de junio de 2013).
2. Usa el solucionador de ecuaciones para comprobar que las raíces que obtuviste en cada una de las ecuaciones cuadráticas que resolviste son correctas.
3. Con la información que se te proporciona en la página, complementa la información que en esta lección se te brindó acerca de la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Encuentra ambos números.
2. Una solución de la ecuación $4x^2 - 7x + c = 0$ es 1. Calcula la otra solución y el valor de c.
3. Una caja mide 5 dm de altura y de ancho 5 dm más que de largo. Su volumen es 1 500 dm^3. Calcula el largo y el ancho de la caja.
4. Traza en tu cuaderno un rectángulo cuya área sea igual a 135 cm^2 y cuyo perímetro sea igual a 48 cm.

5. El número de diagonales (D) de un polígono de n lados está determinado por la fórmula: $D = \frac{n(n-3)}{2}$. ¿Cuántos polígonos poseen 27 diagonales y cuántos lados tienen?

6. Mide el margen de una página de tu cuaderno de matemáticas y calcula su área. Con la hoja construye una caja de papel cuya área de la base sea igual a la mitad del área de la hoja. Para construir la caja traza en las esquinas de la hoja cuadros del mismo tamaño, recórtalos y une las pestañas .

7. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método que consideres pertinente.

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$ c) $40x^2 - 13x + 1 = 0$

b) $2x^2 + 10x + 12 = 0$ d) $(x + 2)^2 - 3 = 4x$

8. Completa la Tabla 3.

Tabla 3

Ecuación	a	b	c	¿Tiene solución?		
$3x^2 - 8x = 0$					$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 81 = 0$					$x_1 =$	$x_2 =$
$x^2 - 3x + 4 = 0$					$x_1 =$	$x_2 =$
$4x^2 + x - 3 = 0$					$x_1 =$	$x_2 =$

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de los resultados.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			
Escuché con atención y respeto.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en resolver los problemas estableciendo una ecuación cuadrática.			
Resolvió correctamente ecuaciones de segundo grado mediante la fórmula general.			
Colaboró en el análisis del discriminante y en las conclusiones sobre la solución de una ecuación cuadrática.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 15
Problemas de congruencia y semejanza

Explora

Analiza los siguientes planteamientos y responde lo que se pregunta.

1. Aarón forma parte de un grupo de excursionistas, quienes se están preparando para acampar varios días en el valle del Mezquital. La Figura 1 muestra la imagen de la casa de campaña que usó Aarón la última vez. Él piensa reforzarla agregando una estructura triangular flexible para dar mayor estabilidad a la casa de campaña.

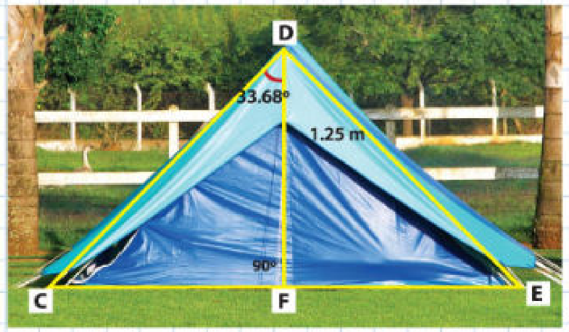


Figura 1

Observa la Figura 1 y contesta:

a) ¿Cuáles son los dos triángulos que se forman si Aarón agrega una varilla perpendicular a la base de la tienda, como se muestra en la Figura 1?

b) Los triángulos que se forman, ¿son congruentes? Sustenta tu respuesta empleando los criterios de congruencia de triángulos.

c) ¿Son semejantes? Da argumentos geométricos basados en la relación de semejanza de dos o más triángulos.

2. Aarón decidió que la estructura triangular se doble en el punto medio de los lados CD y DE para guardarla sin ningún problema. Ubica los puntos medios de cada lado, llámalos P_1 y P_2 y únelos mediante una recta l. Llama al punto de intersección de la recta l y el $\overline{DF}$, P_3.

Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en el bloque 1, con respecto a la construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos), sus propiedades y los correspondientes criterios de congruencia y semejanza de triángulos te serán de gran utilidad para resolver problemas relacionados con esos temas.

Relaciónalo con...

Educación ambiental para la sustentabilidad. Para evitar incendios forestales al visitar zonas arboladas, se recomienda, de preferencia, no hacer fogatas o en caso de hacerla, no descuidarla y apagarla completamente con agua y tierra.

Observa tu construcción y contesta:

a) ¿Qué triángulos se han formado?

b) Los triángulos formados, ¿son congruentes? Sustenta tu respuesta empleando los criterios de congruencia de triángulos.

c) Los ΔDEF y ΔDP_2P_3 ¿son semejantes? Da argumentos geométricos basados en la relación de semejanza.

Reúnete con otros compañeros y comparen sus respuestas, luego en su cuaderno respondan lo siguiente:

- ¿Qué características debe de tener cualquier figura para que sea congruente con respecto a otra?
- ¿Qué características debe de tener cualquier figura para que sea semejante con respecto a otra?
- ¿Cuáles son los criterios de congruencia?
- ¿Cuáles son los criterios de semejanza?

Si tienen dudas, coméntelas con su profesor para resolverlas.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas.

1. En la Figura 2 se muestra una casa cuya fachada está formada por una familia de triángulos semejantes. Considerando que los datos están dados en metros, contesten:

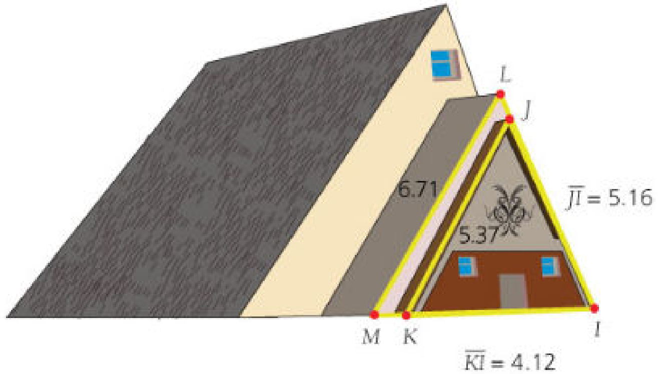


Figura 2

a) ¿Los datos que proporciona la Figura 2 son suficientes para conocer la medida de los lados LJ y KM? Justifiquen.

b) Establezcan razones con los datos que conocen de los triángulos LIM y JIK y empleen los criterios de congruencia o semejanza de triángulos para establecer igualdades entre ellas.

c) ¿Cuánto mide $\overline{LJ}$?

d) ¿Cuál es el valor de $\overline{KM}$?

e) Describan el procedimiento que emplearon para calcular las medidas de $\overline{LJ}$ y $\overline{KM}$.

2. Julia es una alumna de tercero de secundaria. Su profesor, al igual que a ustedes, le pidió resolver el problema anterior. Ella resolvió el problema razonando de la siguiente manera:

Dado que conozco tres medidas puedo establecer la siguiente igualdad de razones:

$$\frac{6.71}{5.37} = \frac{x}{5.16}$$

Después se multiplica por 5.16 a ambos miembros de la igualdad y se obtiene:

$$\frac{(5.16)\,6.71}{5.37} = \frac{x\,(5.16)}{5.16}$$

$$6.4 = x$$

Por lo tanto, $\overline{LJ} = 1.2$ m

a) ¿Qué opinan del razonamiento de Julia?

b) ¿Su procedimiento fue semejante al de ella? Expliquen.

c) ¿Por qué, según Julia, la medida del $\overline{LJ}$ es de 1.2 m?

d) ¿Obtuvieron el mismo resultado?

e) Siguiendo la misma línea de razonamiento, calculen la medida del lado KM y escríbanla.

f) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos LIM y KJI?

Reúnanse con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas con la finalidad de que sean correctas. Posteriormente, en su cuaderno escriban una conclusión sobre cómo se pueden resolver problemas a través de la semejanza de triángulos.

Realicen las siguientes actividades:

3. Una grúa transporta una máquina para hacer excavaciones en una plataforma petrolera. Para colocar la máquina en un lugar determinado, es necesario calcular la distancia señalada con el $\overline{RP}$.

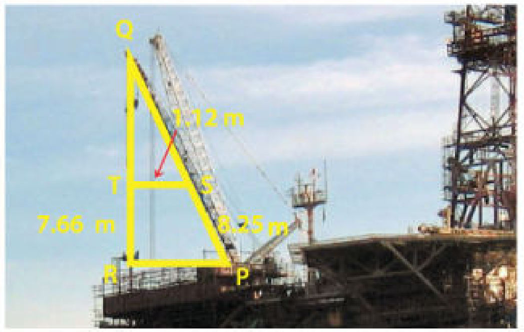


Figura 3

Con los datos de la Figura 3 calculen el valor de la distancia $\overline{RP}$ y describan el procedimiento que emplearon.

4. Para cada pareja de triángulos establezcan la razón de semejanza y determinen los valores desconocidos.

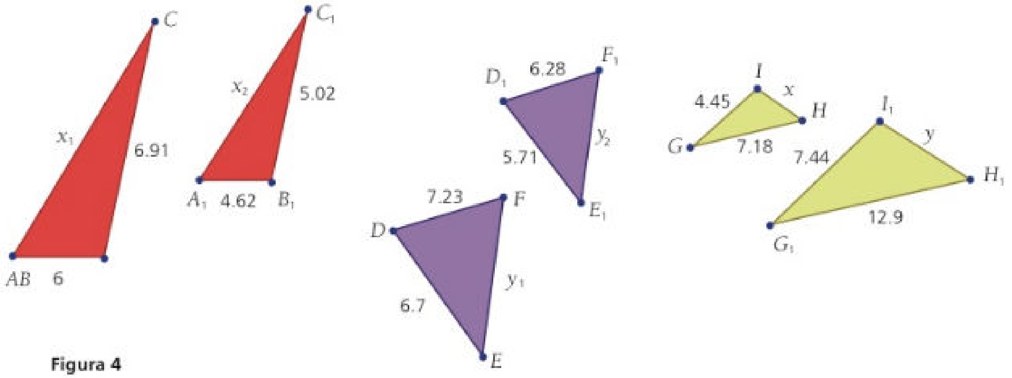


Figura 4

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego de manera grupal establezcan cuál es la razón de semejanza entre ΔQTS y ΔQRP, del Problema 3. Complementen su conclusión sobre las ventajas de aplicar la semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

En la cima

Realicen los trazos que sean necesarios para justificar sus respuestas.

1. La Figura 5 muestra la fotografía que María tomó a una construcción en sus vacaciones pasadas. Analicen los trazos realizados sobre la fotografía y determinen la medida de $\overline{EB}$.

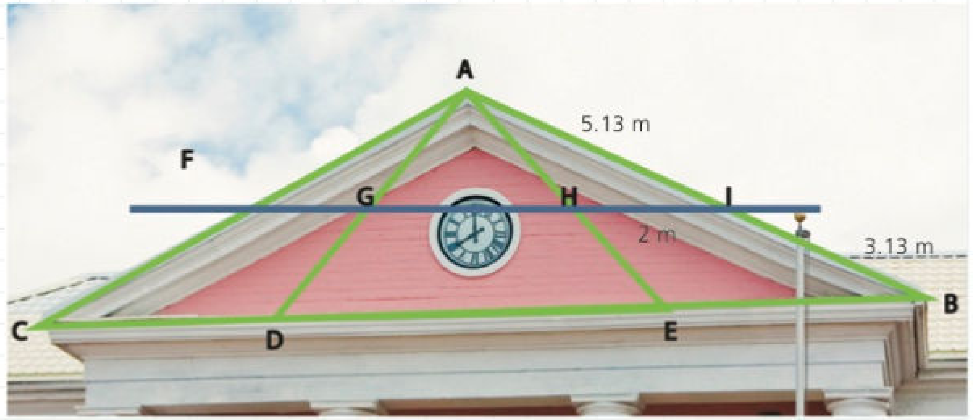


Figura 5

2. Dados ΔABC y $\Delta AB'C'$, ¿calculen el valor de x?

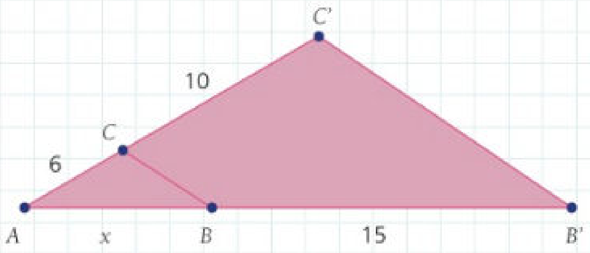


Figura 6

3. Si el área de dos triángulos equiláteros es 5 cm² y 25 cm² respectivamente, contesten:
   a) ¿Son semejantes? ¿Por qué?
   b) En caso afirmativo justifiquen su respuesta y calculen la razón de semejanza.

En plenaria, expliquen los procedimientos que emplearon para resolver los problemas y comparen sus procedimientos con los de sus compañeros. Discutan entre ustedes acerca de las magnitudes que les permite medir la semejanza o congruencia de triángulos. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

RDT

1. Visita la página http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/semej4.htm (última consulta: 26 de junio de 2013).
2. Realiza el ejercicio propuesto en la sección "Cálculo de alturas a partir de la sombra" y contesta cuánto mide la distancia AB.
3. Realiza el ejercicio propuesto en la sección "Calcular la altura sin necesidad de sombra" y contesta cuál es la medida de la altura del árbol de la figura.

Expliquen sus resultados en clase. En caso de dudas, soliciten el apoyo de su profesor.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Dos triángulos semejantes tienen una superficie de 12 cm² y 27 cm² respectivamente. Determina la razón de semejanza de los dos triángulos.

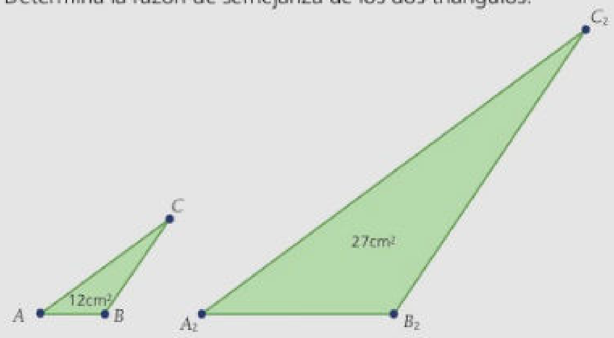


Figura 7

2. La razón de semejanza de dos triángulos es 6. Determina la relación de sus áreas. Si el área del triángulo menor es 10 cm^2, calcula el área del triángulo grande.
3. De acuerdo con las imágenes de las Figuras 8 y 9, plantea problemas que se puedan resolver aplicando la semejanza de triángulos.


Figura 8


Figura 9

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas y planteamientos.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Colaboré en las tareas del equipo y del grupo.			
Escuché y respeté las opiniones de los demás.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó las situaciones que se pueden resolver usando lo criterios de congruencia de triángulo.			
Identificó las situaciones que se pueden resolver empleando los criterios de semejanza de triángulo.			
Colaboró en la aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver los problemas planteados.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 16
Teorema de Tales

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y resuelve los dos problemas relacionados con él.

1. En el $\triangle ABC$ de la Figura 1 se han trazado tres segmentos paralelos al lado AB; de esta manera, los lados AC y BC se dividen en cuatro partes distintas, respectivamente.

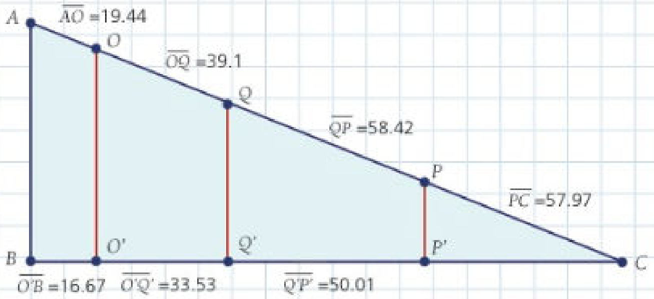


Figura 1

a) Si $\overline{P'C}$ es congruente a $\overline{Q'P'}$, ¿es cierto que el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle PP'C$? Demuéstralo numéricamente.
b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre el $\triangle ABC$ y el $\triangle PP'C$?
c) ¿Qué otros triángulos son semejantes al $\triangle ABC$? Da al menos tres ejemplos.
d) ¿La razón de semejanza entre todos los triángulos semejantes que se forman en la Figura 1 es la misma?

2. Considera los segmentos de color rojo. Si se prolongan estos segmentos, ¿qué tipo de rectas se forman?
3. Si se prolongan $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, ¿qué tipo de rectas se forman y cómo se relaciona con las rectas identificadas en la respuesta anterior?
4. Retoma el análisis de las medidas de la Figura 1, ¿qué relación se puede establecer entre las medidas de $\overline{BO'}$, $\overline{O'Q'}$, $\overline{Q'P'}$ y $\overline{P'C}$?
   a) ¿Y entre $\overline{AO}$, $\overline{OQ}$, $\overline{QP}$, y $\overline{PC}$? Explica.
   b) ¿Hay alguna relación entre las medidas de $\overline{OO'}$, $\overline{QQ'}$ y $\overline{PP'}$? Explica.

Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en los bloques anteriores con respecto al tema de semejanza te serán de utilidad para analizar las propiedades y relaciones entre las medidas de los segmentos de rectas paralelas cortadas por una transversal. Estos temas te permitirán aplicar el teorema de Tales en la resolución de problemas geométricos.

c) ¿Cuál es la longitud de $\overline{AB}$?
d) ¿Qué relación de las establecidas en los incisos anteriores, te permite conocer la longitud de $\overline{AB}$?

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus explicaciones, argumentos y respuestas.

De manera grupal, discutan lo siguiente:

- Dadas dos o más rectas paralelas que son cortadas por una trasversal, ¿los segmentos entre ellas son proporcionales?
- ¿Cuándo dos segmentos tienen medidas proporcionales entre sí? ¿Qué significa que dos o más segmentos de recta sean proporcionales?

Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas.

1. En su cuaderno, tracen un triángulo cuya medida de ángulos sea $\alpha = 82°$, $\beta = 44°$ y $\gamma = 54°$. El lado común a los ángulos β y γ debe medir 12 cm y éste será la base del triángulo. Nombren A, al vértice que coincide con el ángulo β, B al vértice que coincide con el ángulo α y C al vértice que coincide con el ángulo γ. ¿Qué otras características tiene el ΔABC?

a) Ubiquen el punto medio de $\overline{AC}$, y llámenlo O.
b) Tracen una recta l que pase por el punto O y sea paralela a $\overline{BC}$. Llamen O' al punto de intersección entre la recta l y BA.
c) Al terminar, analicen la figura que construyeron y contesten:

- ¿Qué relación existe entre ΔABC y $\Delta AOO'$.
- ¿Cómo son las medidas de $\overline{AO}$ y $\overline{AC}$?
- ¿Qué relación hay entre la longitud de los lados AB y AO'?
- Las longitudes de los lados BC y OO', ¿son proporcionales?

2. Ahora, tracen los puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{AO}$ y llámenlos P y Q en el orden correspondiente. Enseguida tracen rectas paralelas, l_1 y l_2, al lado BC que pasen por los puntos P y Q, respectivamente. Llamen P' al punto en que la recta l_1 interseca al lado AB y Q' al punto en que la recta l_2 interseca al mismo lado. Una vez que terminen contesten:

a) ¿Cuántos triángulos se obtienen al trazar las rectas paralelas l_1 y l_2?

____

____

b) ¿Cuánto mediría el segmento …

AP si $\overline{AC}$ midiera 16 cm?
PO si $\overline{AC}$ midiera 2.5 cm más?
OQ si $\overline{AC}$ midiera 3 veces lo que mide?
QC si $\overline{AC}$ midiera 2 cm menos?

c) Analicen sus respuestas y reflexionen: ¿Es cierto que si a un triángulo ABC cualesquiera se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes? Comprueben numéricamente, en su cuaderno, el resultado anterior.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas, en caso de no coincidir discutan sus diferencias y establezcan la respuesta correcta. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas con la finalidad de comprobar si son correctas. Posteriormente, de manera grupal respondan la pregunta: ¿En los triángulos construidos en las actividades 1 y 2 se puede establecer una relación de proporcionalidad entre sus medias?

Realicen lo que se pide:

3. Dado el triángulo ABC de la Figura 2, establezcan en su cuaderno una igualdad de razones para demostrar que ΔABC y $\Delta AFF'$ son semejantes. Se sabe que $\overline{AF}$ mide $\frac{3}{4}$ de lo que mide $\overline{AB}$.

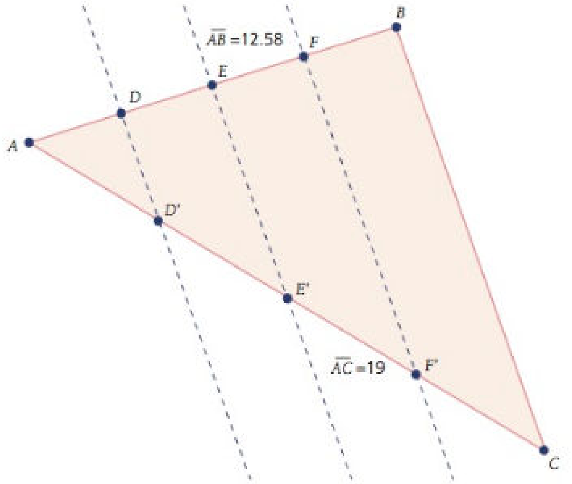


Figura 2

4. Lizeth, una alumna de tercero de secundaria, estableció con respecto a la Figura 2 la siguiente igualdad:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AF'}}$$

a) ¿Están de acuerdo con la igualdad planteada por Lizeth? Argumenten.
b) ¿Ustedes la plantearían de otro modo? En caso afirmativo escríbanla.
c) Sustituyan por valores numéricos la igualdad de Lizeth y calculen la medida de $\overline{AF}$ y $\overline{AF'}$.
d) ¿Cómo son entre sí los segmentos que han medido? Justifiquen su respuesta.
e) ¿Cuál es la razón de semejanza de ΔABC y $\Delta AFF'$ de la Figura 2?

f) Completen la Tabla 1 con las razones de semejanza que se establecen entre los triángulos que se indican.

	$\triangle ABC$ y $\triangle AEE'$	$\triangle ABC'$ y $\triangle ADD'$	$\triangle ADD'$ y $\triangle AFF'$
Razón de semejanza			

Tabla 1

g) Con base en los resultados de la Tabla 1, calculen la longitud de $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{D'E'}$ y $\overline{E'F'}$.
h) Las medidas de los segmentos anteriores, ¿son proporcionales?

Analicen las respuestas de este ejercicio con las de los ejercicios 3 y 4. Escriban en su cuaderno una o varias conclusiones con respecto a las relaciones de proporcionalidad que se establecen entre las medidas de los segmentos de los lados de un triángulo al trazar rectas paralelas.

Realicen lo que se les pide.

5. En la Figura 3, en el $\triangle ABC$ se han trazado 5 rectas paralelas al lado BC.

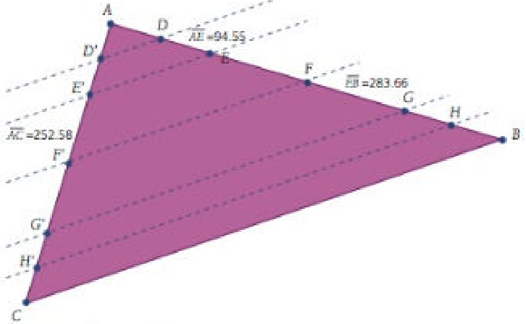


Figura 3

a) ¿Cuántos triángulos se han formado?
b) ¿Cómo son entre sí los triángulos formados?
c) Establezcan la razón de semejanza entre ΔABC y $\Delta ADD'$. $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

d) Establezcan la razón de semejanza entre $\Delta AEE'$ y $\Delta ADD'$. $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

e) La relación entre la medida de $\overline{AE}$ con respecto a $\overline{AC}$ es de $\frac{1}{4}$. ¿Están de acuerdo con la afirmación anterior? Justifiquen.
f) ¿Cuál es el valor de la razón de $\overline{EB}$ y $\overline{BA}$?

Reúnanse con otra pareja de compañeros, comparen sus respuestas de manera tal que sean correctas.

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego de manera grupal discutan acerca de por qué al trazar una línea paralela a cualquiera de los lados de un triángulo, los segmentos generados tienen medidas que son proporcionales. Demuéstrenlo numéricamente.

En la cima

1. En su cuaderno realicen el siguiente procedimiento:

a) Tracen un segmento AB que mida 5 cm.
b) Tracen una recta l, que pase por el extremo A del segmento y que forme un ángulo de 22° con la horizontal.
c) Con su compás, tracen una semicircunferencia con origen en A y radio $r = 0.5$ cm. A los puntos en que la semicircunferencia corta a la recta l y al segmento AB llámenlos P y P', respectivamente.
d) Repitan el paso anterior nueve veces tomando en cada vez como origen de la nueva semicircunferencia el punto de intersección entre la recta l y la semicircunferencia anterior.
e) Llamen D al último punto de intersección entre la semicircunferencia y la recta l y tracen el segmento BD.
f) Por cada uno de los puntos trazados en la recta l tracen rectas paralelas al segmento BD.

Demuestren que cada una de las partes en que se dividió el segmento $\overline{AB}$ son proporcionales.

2. Comenten cómo pueden dividir un segmento de longitud en s partes iguales.

En plenaria, expliquen el procedimiento establecido y demuestren que funciona para los siguientes casos:

a) Dividir $\overline{IJ}$ en 7 partes iguales
b) Dividir $\overline{LK}$ en 13 partes iguales.

Figura 4

El **teorema de Tales** dice que si dos rectas cualesquiera (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA', BB', CC') los segmentos determinados en una de las rectas ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra ($\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$).

Por tanto:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

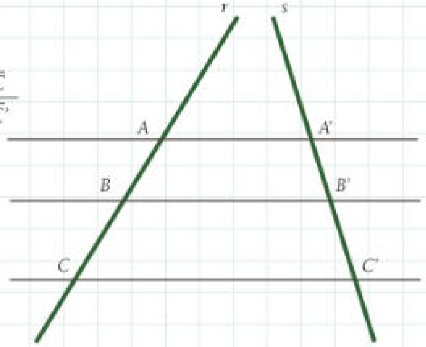


Figura 5

3. Apliquen el teorema de Tales para dividir a $\overline{IJ}$ en partes proporcionales a los segmentos correspondientes a los de la recta LK.

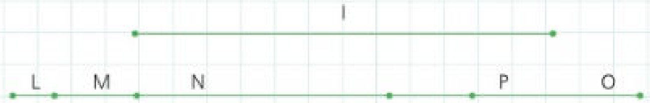


Figura 6

4. En el problema anterior comprueben numéricamente que los segmentos determinados sobre la recta IJ son proporcionales a los segmentos correspondientes en la recta LK. Calculen la razón de proporcionalidad.

Socialicen sus respuestas y comenten acerca de las principales aplicaciones del teorema de Tales. Escriban sus conclusiones en el cuaderno.

Destreza y estrategia

Para resolver los siguientes problemas, realiza los trazos necesarios para justificar tus respuestas.

1. Con base en la Figura 7 contesta:
   a) Si $\overline{AB} = 1$ u, $\overline{CD} = 3$ u y $\overline{GH} = 4.8$ u, ¿cuánto mide $\overline{EF}$?
   b) Si $\overline{FG} = 18$ u, $\overline{CD} = 63$ u y $\overline{GH} = 54$ u, halla la longitud de $\overline{BC}$.
   c) Si $\overline{EF} = 4$ u, $\overline{DC} = 10$ u y $\overline{AB} = 8$ u, halla la longitud de $\overline{GH}$.
   d) Si $\overline{FG} = 8.4$ u, $\overline{AB} = 6$ u y $\overline{BC} = 12$ u, halla la longitud de $\overline{EF}$.

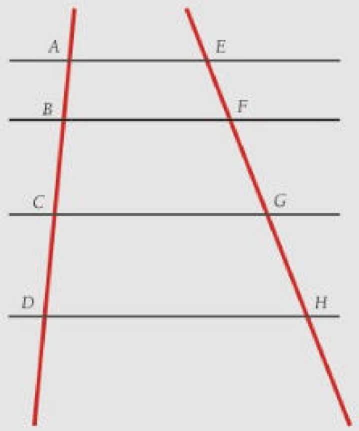


Figura 7

2. Determina los valores de x y y en los triángulos de la Figura 8.

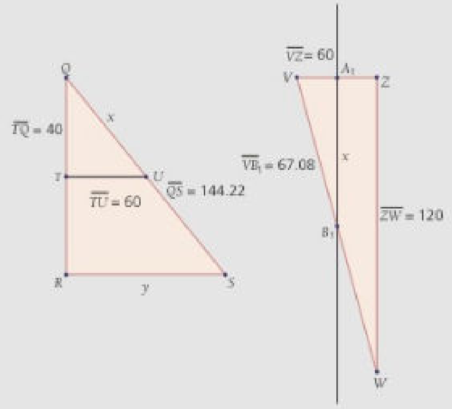


Figura 8

3. Traza un triángulo ABC que sea rectángulo y que mida 8 cm de base y 7 de altura. Ubica el punto medio de $\overline{AB}$ y traza un segmento paralelo a $\overline{BC}$, que pase por dicho punto medio. Demuestra, utilizando el teorema de Tales, que los lados de $\Delta AB'C'$ son proporcionales a los de ΔABC.

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Colaboré en las tareas del equipo y grupo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Utilizó correctamente el teorema de Tales para resolver problemas geométricos.			
Colaboró en la resolución de los problemas.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 17
Figuras homotéticas

Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en los bloques anteriores con respecto al tema de semejanza te serán de utilidad para la construcción de figuras (regulares o no) que son homotéticas.

Explora

1. Considera el trapecio *ABCD* de la Figura 1 para realizar el siguiente procedimiento.

   a) Une con una recta el origen de coordenadas con los vértices del trapecio *ABCD*.

   b) Divide en tres partes iguales cada uno de los segmentos que trazaste en el paso anterior.

   c) Sobre $\overline{OA}$ ubica el punto *A'* a $\frac{2}{3}$ del punto *A*.

   d) Repite el paso anterior para trazar los puntos *B'*, *C'* y *D'* en los segmentos respectivos.

   e) Une los puntos *A'*, *B'*, *C'* y *D'*.

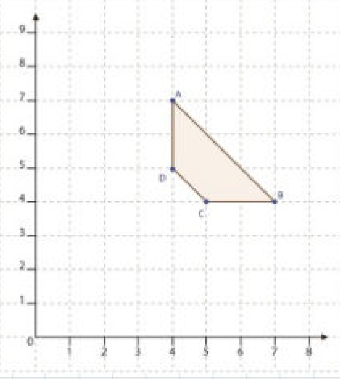


Figura 1

Con base en tu construcción contesta:

- ¿Qué figuras geométricas obtuviste?
- ¿Cómo son?
- ¿Son semejantes? Explica tu respuesta.
- En caso de que tu respuesta anterior sea afirmativa contesta: ¿cuál es la relación de semejanza entre los lados proporcionales de las figuras?
- Entonces, ¿qué significado puedes asociarle a la acción de dividir en tercios la longitud de cada uno de los segmentos de recta y ubicar los puntos *A'*, *B'*, *C'*, y *D'* a $\frac{2}{3}$ de los vértices *A*, *B*, *C* y *D*?

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus explicaciones. Luego, juntos reflexionen acerca de si la relación de semejanza entre los trapecios depende de que las rectas que trazaron tengan un punto en común.

En construcción

Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas.

1. Lean la siguiente información asociada a la construcción de figuras homotéticas y semejantes en el plano.

La construcción de dos o más figuras (regulares o no) a través de una homotecia es un caso particular de la semejanza. Por ejemplo, △*ABC* y △*A'B'C'* son homotéticos y semejantes.

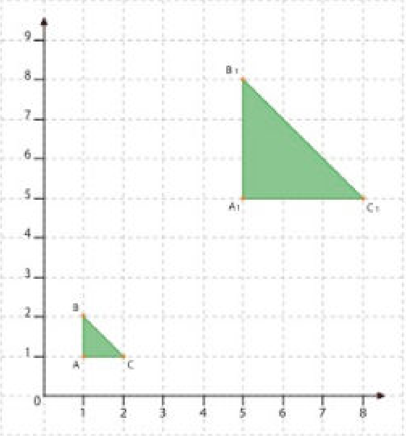


Figura 2

a) ¿Qué entienden acerca de la información anterior?

b) El △*ABC* y △*A'B'C'* de la Figura 2 son semejantes. ¿Por qué?

c) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los lados de los triángulos?

d) ¿Por qué se considera que los triángulos son homotéticos?

e) Tracen las líneas que van del origen del plano cartesiano a los vértices de cada triángulo.

f) Con base en estas líneas, ¿dónde deben ubicar el triángulo *A'B'C'* de manera que la razón de semejanza con el original sea 2.5?

2. Los cuadriláteros *ABCD* y *A'B'C'D'* de la Figura 3 de la siguiente página, son homotéticos. Consideren el punto *O* como centro de homotecia y completa la Tabla 1 con los datos que se piden.

Segmento	Longitud	Cociente
OA		$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$ =
OA'		
OB		$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$ =
OB'		
OC		$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}$ =
OC'		
OD		$\frac{\overline{OD}}{\overline{OD'}}$ =
OD'		

Tabla 1

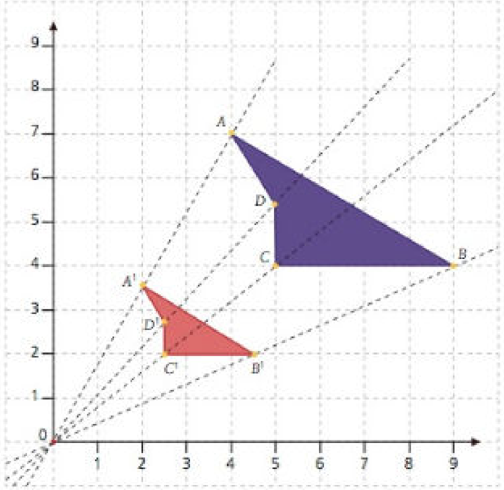


Figura 3

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los cuadriláteros homotéticos?

b ¿Qué propiedades se conservan entre el cuadrilátero $ABCD$ y su cuadrilátero homotético $A'B'C'D'$?

c) ¿Qué propiedades del cuadrilátero original no se conservan? Expliquen a detalle.

d) ¿Es posible afirmar que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AD} \parallel \overline{A'D'}$, $\overline{DC} \parallel \overline{D'C'}$ y $\overline{CB} \parallel \overline{C'B'}$? Sustenten con argumentos.

3. En su cuaderno tracen el sistema coordenado de la Figura 3 y el cuadrilátero $ABCD$ de esa misma figura. Enseguida tracen un cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ homotético al cuadrilátero $ABCD$ con razón de semejanza $\frac{1}{2}$. Al terminar su construcción analícenla y contesten:

a) ¿El cuadrilátero $A_1B_1C_1D_1$ es de mayor o menor tamaño con respecto al cuadrilátero $ABCD$?

b) ¿Qué pueden concluir acerca del tamaño de una figura homotética con respecto de la original cuando se aplica un factor de homotecia menor a 1?

c) Cuando se aplica un factor de homotecia mayor a 1, ¿cómo es el tamaño de la figura homotética con respecto a su original?

Reúnanse con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas con la finalidad de que sean correctas. Discutan acerca de qué propiedades se conservan entre la figura original y su figura homotética y cómo el valor de la razón de semejanza afecta al tamaño de la figura homotética.

En equipo, realicen lo que se pide.

4. En el plano cartesiano de la Figura 4 de la siguiente página, ubiquen el centro de homotecia (O) en la coordenada (0,8). Abran su compás 4 cm y apoyándolo en O tracen una semicircunferencia que interseque a las rectas que ya están trazadas en el cuadrante del plano. Llamen a los puntos de intersección entre las rectas y la circunferencia como A, B, C, D y E y únanlos de tal manera que formen un polígono.

a) Construyan un polígono homotético al polígono $ABCDE$ con razón de semejanza $\frac{2}{5}$ y llámenlo $A'B'C'D'E'$ en correspondencia con los vértices del polígono original.

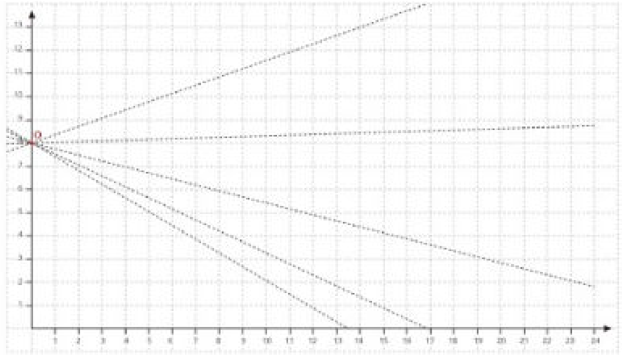


Figura 4

b) Escriban las características y propiedades del polígono $ABCDE$.

c) ¿Qué propiedades se mantienen invariantes entre la figura homotética y la original?

d) Determinen las medidas de $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$.

e) ¿Cómo son los lados correspondientes entre la figura original y su homotecia?

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Discutan si los lados correspondientes entre el polígono original y su homotecia siempre son paralelos. Luego escriban una conclusión acerca de qué condiciones son necesarias para la construcción de dos o más figuras homotéticas dado un centro de homotecia.

En la cima

Respondan los siguientes planteamientos.

1. En la construcción que se muestra en la Figura 5 el cuadrilátero $AGHI$ es la figura original y $A'G'H'I'$ es la figura homotética. Consideren el punto O como centro de homotecia, y obtengan los datos que solicitan en la Tabla 2 de la siguiente página.

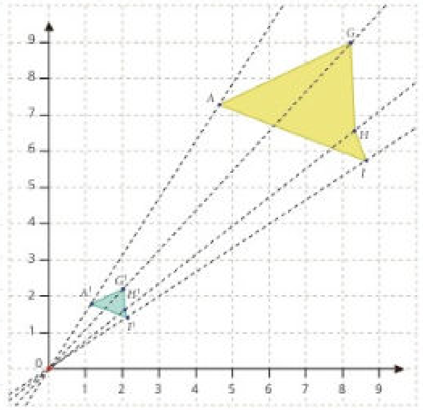


Figura 5

Segmento	Longitud	Cociente
OA		$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} =$
OA'		
OG		$\frac{\overline{OG}}{\overline{OG'}} =$
OG'		
OH		$\frac{\overline{OH}}{\overline{OH'}} =$
OH'		
OI		$\frac{\overline{OI}}{\overline{OI'}} =$
OI'		

Tabla 2

a) ¿Qué significado pueden asociarle a los datos obtenidos en el registro tabular?
b) ¿Se puede obtener figura homotética al polígono *AGHI* cuya razón de semejanza tenga valor negativo? Argumenten su respuesta.

Reúnanse con otras parejas de compañeros y discutan sus argumentos con respecto al último cuestionamiento sobre construir una figura homotética con razón de semejanza negativa; si consideran necesario, hagan trazos de construcciones para fortalecer sus argumentos.

2. Los vértices del cuadrilátero *ABCD* se han tomado como base para trazar sobre las rectas que se muestran en la Figura 6 los puntos *A'*, *B'*, *C'* y *D'*. Unan con segmentos de recta los puntos mencionados y contesten:

a) ¿El polígono formado *A'*, *B'*, *C'* y *D'* es homotético al polígono *ABCD*?
b) Sin realizar ningún cálculo contesten, ¿la razón de semejanza entre los polígonos homotéticos es mayor que 1 o menor que 1?
c) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los polígonos homotéticos?
d) Tomando en cuenta las respuestas del ejercicio anterior, ¿cuáles son las diferencias de dos figuras homotéticas cuando la razón de semejanza es mayor a 1 y cuándo es menor a 1?

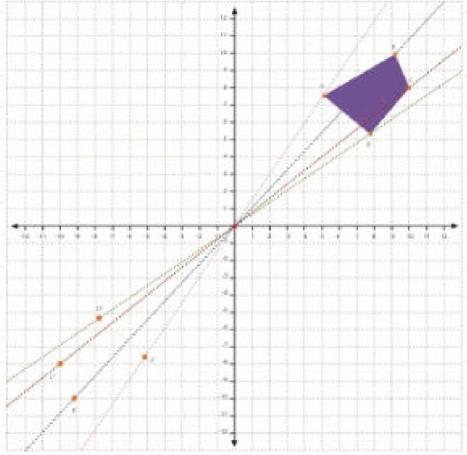


Figura 6

3. Tracen en su cuaderno una figura homotética al cuadrilátero *ABCD* con razón de semejanza de $-\frac{1}{2}$. Expliquen ampliamente el procedimiento que realizaron para construirla.

a) ¿Qué propiedades se conservan entre dos figuras homotéticas al aplicar una razón de semejanza menor a 0?

Dos polígonos (regulares o no) son **homotéticos** cuando se cumplen las siguientes condiciones:
- Cuando las rectas que unen los vértices correspondientes de dos polígonos se cortan en un punto fijo o centro de homotecia llamado *O*.
- Sus lados correspondientes son paralelos.
- El cociente de la longitud de dos segmentos correspondientes es la razón de homotecia, y se representa como:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

4. Determinen la razón de homotecia de las siguientes figuras.

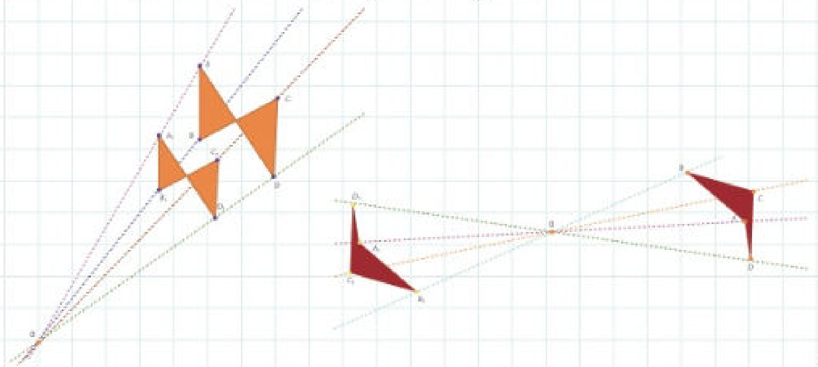


Figura 7

Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos con respecto a cuáles son las propiedades de las figuras homotéticas con razón de semejanza mayor a 1, menor a 1 pero mayor que 0 y menor que 0.

RDT

1. Visita la dirección electrónica: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/homoteciasysemejanzas/homoteciasysemejanzas.htm (última consulta: 26 de junio de 2013).

En la página electrónica anterior encontrarás información sobre la relación entre semejanza y homotecia; en particular revisa la sección titulada "Homotecia".

2. De acuerdo a la información, contesta:

a) En una homotecia, si k<1, ¿dónde queda situado el punto P'?

b) Cuando se tiene una razón negativa, ¿dónde se ubica el centro de homotecia?

c) Escribe tus conclusiones con respecto a las experiencias.

Si hay dudas coméntalas con tu profesor.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas. Realiza los trazos que sean necesarios para justificar tus respuestas.

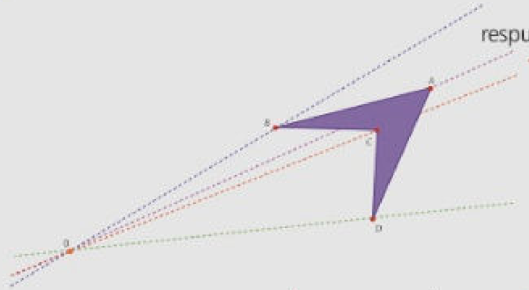


Figura 8

1. Traza el polígono homotético a $ABCD$ con razón de semejanza de 0.75.
   a) ¿Cuál es la medida de $\overline{OB}$ y $\overline{OB'}$?

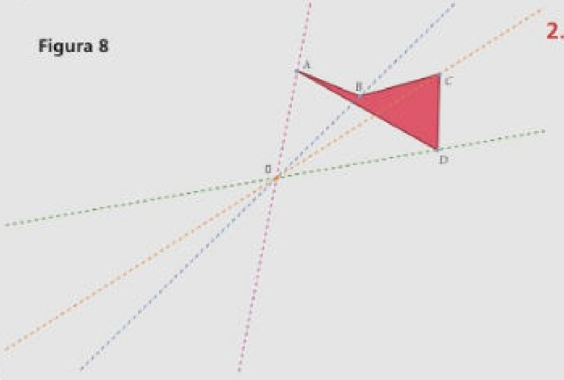


Figura 9

2. Traza el polígono homotético al cuadrilátero $ABCD$ con razón de semejanza –1.25.
   a) Calcula la medida de OA y OA' si la razón de semejanza fuera de –2.

En plenaria y con la orientación de su profesor, validen sus construcciones de manera que al final sean correctas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó las características que permanecen invariables y las que cambian en las figuras homotéticas.			
Colaboró en la construcción de figuras homotéticas.			
Participó en el análisis de las propiedades de las formas geométricas al aplicar una homotecia mayor o menor a 1 (positiva y negativa).			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 18
Gráficas de funciones cuadráticas

Explor@

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. El área del círculo está determinado por la fórmula $A = \pi r^2$. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa correctamente la relación que existe entre el área del círculo y su radio. Justifica tu respuesta.

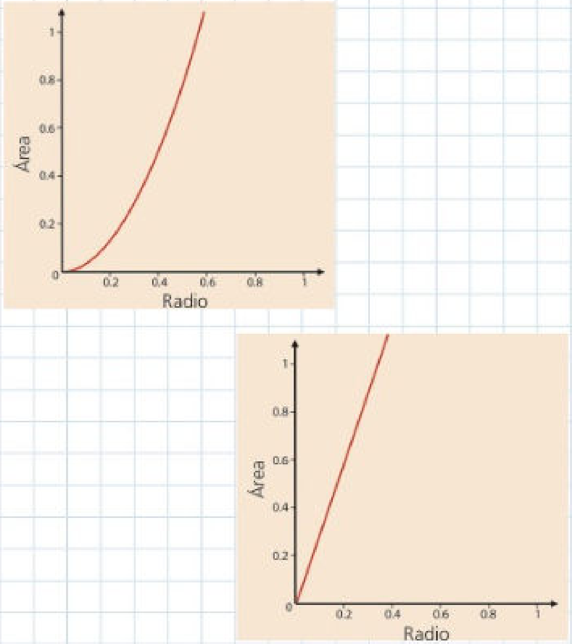


Figura 1

a) ¿De qué variable depende el área del círculo?
b) ¿Cuál es la variable independiente?
c) ¿Qué tipo de expresión algebraica es la fórmula del área del círculo?

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Expliquen en qué se basaron para elegir la gráfica que corresponde a la fórmula.

Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.

Nexos

En las Lecciones 1, 8 y 14 del presente texto, has resuelto problemas que implican plantear una ecuación de segundo grado y resolverla por varios métodos según el tipo de ecuación.

En la Lección 5, resolviste problemas que implican relaciones de variación cuadrática. Retomar esos conocimientos es fundamental para la resolución de problemas de esta lección. ■

En construcción

Realicen los siguientes ejercicios.

1. La gráfica de la Figura 2 representa el movimiento de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 25 m/s. La altura que alcanza la pelota, si la fricción del aire se considera nula, se calcula a través de la siguiente fórmula:

$h(t) = -5t^2 + 25t$, donde t representa el tiempo y h la altura.

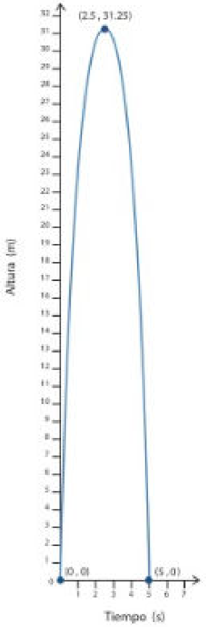


Figura 2

Analicen la gráfica y contesten:

a) ¿Qué altura ha alcanzado la pelota a los 4 s de recorrido?
b) ¿Qué tiempo ha transcurrido cuando se encuentra a una altura de 18 m?
c) ¿Existen parejas de puntos para las cuales la altura de la pelota sea la misma? Expliquen su respuesta y den algunos ejemplos.
d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y en qué tiempo lo hace?
e) Una vez alcanzado el punto máximo, ¿cuánto tardó la pelota en regresar al piso?
f) En el punto máximo ¿cuál consideran que es la velocidad de la pelota? Justifiquen su respuesta.
g) Utilicen sus respuestas para describir el movimiento de la pelota.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten acerca de la información que pueden obtener del análisis de una gráfica.

Analicen las siguiente situaciones y realicen lo que se pide:

2. Se soltó una pelota en caída libre, algunos datos se registraron en la Tabla 1 y a partir de ellos se trazaron los puntos de la gráfica de la Figura 3 .

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
0.25	0.3
0.50	1.25
0.75	2.81
1	
1.25	
1.5	

Tabla 1

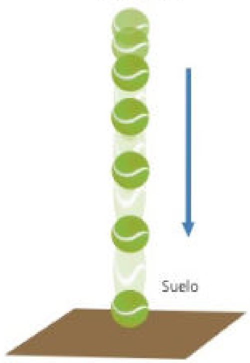


Figura 3

a) Tracen la curva que pasa por los puntos marcados.

Para obtener la ecuación que representa el movimiento de la pelota se propone como modelo una función cuadrática de la forma $d = at^2 + bt + c$, donde d representa la distancia recorrida y t el tiempo.

b) Hallen los valores de a, b y c de la función para $t = 0$ s, $t = 0.25$ s y $t = 0.5$ s.

Para encontrar dichos valores, analicen y completen lo siguiente:

Para $t = 0$, $\longrightarrow$ $0 = a(0^2) + b(0) + c$; de esta ecuación se puede concluir que $c =$ ______

Para $t = 0.25$, $\longrightarrow$ $0.3 = a(0.25^2) + b(0.25)$; de esta ecuación resulta que $0.3 = 0.0625a + 0.025b$

Para $t = 0.50$, $\longrightarrow$ $1.25 = a(0.50^2) + b(0.50)$; por lo tanto, $1.25 =$ __________

La segunda y tercera ecuaciones forman un sistema de ecuaciones simultáneas del que se obtienen los valores de a y b. ¿Cuáles son esos valores? $a =$ ______ $b =$ ______

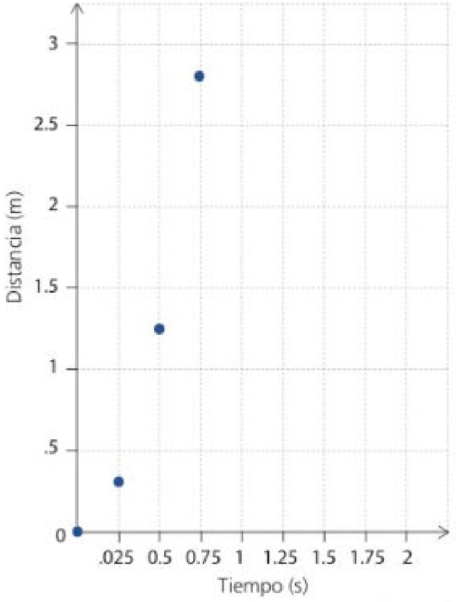


Figura 4

c) Escriban la función que modela el fenómeno, luego, completen la Tabla 1 y la gráfica de la Figura 4 con los datos.

3. Un puente colgante está suspendido de dos torres de 227 m de altura separadas por una distancia de 1 280 m, el ancho de la calzada es de 27 m y ésta se encuentra aproximadamente a 67 m del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Una representación gráfica bidimensional del puente se muestra en la Figura 5.

a) ¿Cómo se utilizó la información proporcionada para construir la gráfica del puente?
b) ¿Qué representan x y y en la gráfica?

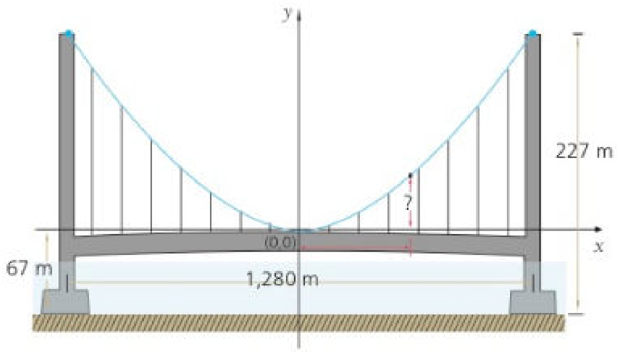


Figura 5

c) A partir de los puntos conocidos de la parábola determinen la función cuadrática $y = ax^2$ que modela la forma de los cables.
d) Usen la función que obtuvieron para determinar la altura de los cables a una distancia de 300 m del centro del puente.

4. Cuando se fabrica un producto, existen gastos para su fabricación como son mano de obra y materiales. Las ganancias se consideran después de restar los gastos de producción o fabricación.

En la gráfica de la Figura 8 se presentan las ganancias de una empresa de fabricación de tenis.

Relaciónalo con...

Educación financiera y del consumidor. Para cuidar la economía personal es importante, al igual que en una empresa, establecer un presupuesto que te permita alcanzar metas al administrar tus gastos, de manera que éstos no superen tus ingresos.

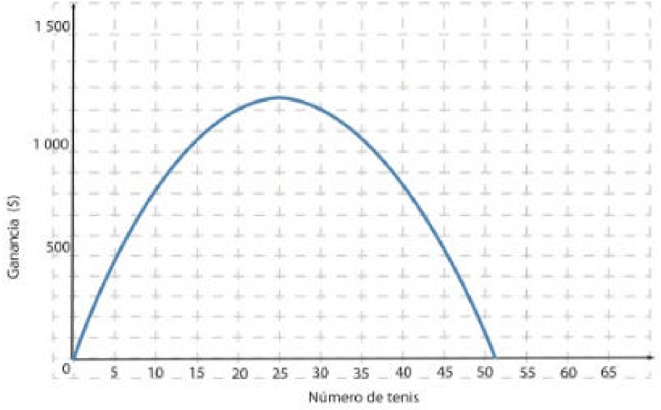


Figura 6

a) ¿Cuántos pares de tenis se deben fabricar diariamente para obtener la mayor ganancia?
b) Si decimos que la ganancia fue de aproximadamente $1 000, ¿cuántos pares de tenis se fabricaron en un día?
c) ¿De cuánto es la ganancia si se fabrican sólo cinco pares de tenis?
d) A partir de qué cantidad de pares de tenis comienzan a disminuir las ganancias?
e) ¿Para qué número de pares de tenis fabricados ya no existen ganancias?
f) ¿Cuál es la función que modela esta situación?

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. De manera grupal, reflexionen acerca de las condiciones que debe cumplir un fenómeno o una situación física para que pueda modelarse con una función cuadrática y discutan acerca de los métodos que usaron para obtener la expresión algebraica de las funciones cuadráticas.

En la cima

1. Analicen la siguiente información.

A toda función de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, se le llama cuadrática o de segundo grado. Donde ax^2 es el término cuadrático; bx es el término lineal y c el término independiente. Los coeficientes a, b y c pueden tomar cualquier valor numérico y el valor de a es diferente de 0.

La gráfica de una función cuadrática es una curva llamada **parábola.**

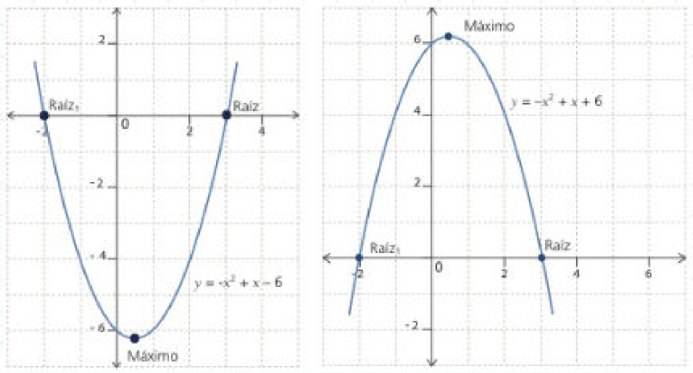


Figura 7

Cada uno de los lugares donde la gráfica corta al eje x, se le llama raíz. El vértice es el punto en el cual la gráfica alcanza su valor máximo o mínimo.

a) Si el signo de a indica hacia dónde se abre la parábola, ¿hacia dónde abre la parábola cuando a es un número positivo?, ¿y cuando es negativo?
b) ¿Las raíces son los valores de la incógnita x cuando la ecuación es igual a 0? Justifiquen sus respuestas.

Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas. Respondan lo siguiente: ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$? ¿y de la ecuación $-x^2 + x + 6 = 0$? Escriban en el cuaderno una conclusión al respecto.

2. La distancia recorrida por un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba se calcula por medio de la fórmula $y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ donde v_0 es la velocidad inicial del cuerpo medida en m/s, t es el tiempo medido en segundos y g es la aceleración gravitatoria cuyo valor aproximado es 10 m/s².

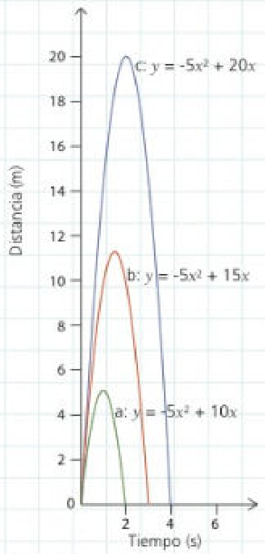


Figura 8

Al lanzar tres veces el mismo objeto, con distinta velocidad inicial, se obtuvieron las tres gráficas que se muestran en la Figura 8.

a) ¿En cuál de los tres experimentos el objeto fue lanzado inicialmente con mayor velocidad?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto en cada experimento?
c) ¿En cuál de los tres experimentos el objeto tarda más en alcanzar el punto máximo? ¿Cuánto tarda?
d) ¿En cuál de los tres experimentos el objeto tarda menos en regresar al suelo? ¿Cuánto tarda?
e) ¿Cuál es la altura que recorrió el objeto en cada experimento al tiempo $t = 1$ s?
f) ¿Cuál es el tiempo que tarda en tocar el suelo el objeto con una velocidad inicial de 10 m/s?

De manera grupal, reflexionen acerca de la información que obtuvieron y escriban algunas conclusiones en su cuaderno acerca del movimiento del objeto.

RDT

Visita la página electrónica http://www22.brinkster.com/nosolomates/ayuda/parabolas.htm (última consulta: 26 de junio de 2013).

Sustituye en la calculadora las diferentes funciones cuadráticas que has obtenido a lo largo de esta lección. Usa la información que despliega la calculadora para complementar tus respuestas.

Con tus compañeros, planteen funciones cuadráticas y traten de anticipar cómo es la gráfica.

Verifiquen con el apoyo de la información de la página. En caso de dudas, acudan a su profesor.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. La temperatura en una zona de Monterrey pasada la media noche está dada por la función $T = -0.25t^2 + 4t + 10$, donde T representa la temperatura en °C y t el tiempo medido en horas.

   a) Construye la gráfica en tu cuaderno.
   b) ¿Cuál fue la temperatura a las 2 de la mañana?
   c) ¿A qué hora la temperatura fue máxima?
   d) ¿A qué hora de la madrugada se tuvo la temperatura más baja?

2. Los animales que saltan al desplazarse siguen trayectorias parabólicas. La expresión $d = 4.5 - \frac{(h-3)^2}{2}$, donde d es la longitud del salto y h la altura del mismo, modela el salto de una rana. Completa la Tabla 2 y en tu cuaderno elabora la gráfica correspondiente.

d (m)	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9
h (m)							

   a) ¿Cuál fue la longitud horizontal del salto de la rana?
   b) ¿Cuál fue la altura máxima del salto?
   c) ¿Qué altura corresponde a un desplazamiento horizontal de 2 m?, ¿y de 7 m?

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las respuestas a las que llegaron.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en dar respuesta a distintos cuestionamientos sobre la interpretación de gráficas de funciones cuadráticas.			
Propuso alguna función para modelar alguna situación.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 19
Gráficas de secciones rectas y curvas

Explor@

Analiza el siguiente planteamiento y responde.

1. Roberto sale a caminar todas las mañanas para mantener su salud física en óptimas condiciones. La gráfica representa uno de los recorridos de Roberto.
   a) ¿Cuánto tiempo camina Roberto?
   b) ¿Qué distancia recorre?
   c) ¿Qué representa la pendiente de la recta?
   d) Calcula su velocidad y anótala.
   e) ¿Cómo es la velocidad a lo largo del recorrido?

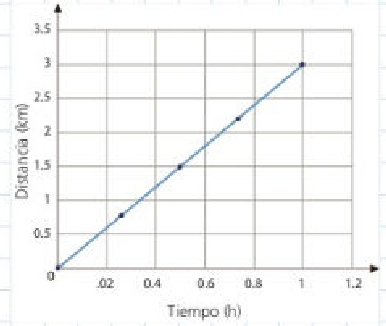


Figura 1

2. Una alberca tiene dos secciones, una parte profunda y una parte menos profunda, como se muestra en la Figura 2.
   La alberca se llena mediante un grifo que le suministra agua de manera constante.
   a) ¿Cuál de las gráficas de la Figura 3 muestra cómo asciende el nivel del agua al abrir el grifo?

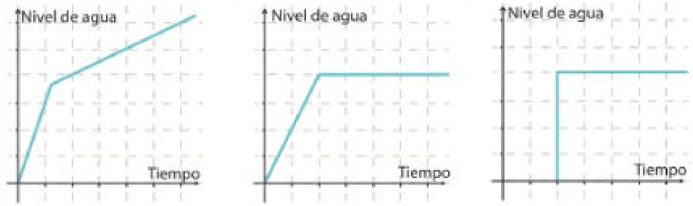


Figura 3

Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

Nexos

En segundo grado, aprendiste a determinar los efectos que sufre la gráfica de una función lineal de la forma $y = mx + b$ al variar los parámetros m y b. En las lecciones 4 y 5 de este grado has analizado las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas de relaciones lineales y cuadráticas.

Estos conocimientos y otros adquiridos en grados anteriores serán de mucha utilidad para la resolución de los problemas de esta lección.

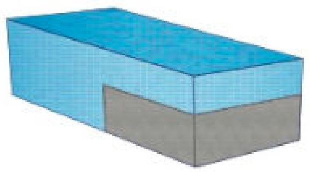


Figura 2

b) ¿En qué sección de la alberca la velocidad de llenado es menor? ¿Por qué?

c) ¿Cómo es la pendiente de la recta que representa la velocidad de llenado de la sección menos profunda con respecto a la pendiente de la recta que representa la sección más profunda?

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Expliquen las características de cada gráfica y cómo las relacionaron con la situación correspondiente.

En construcción

Analicen la información y respondan.

1. La gráfica de la Figura 4 representa el consumo de agua en un cine un día del fin de semana.

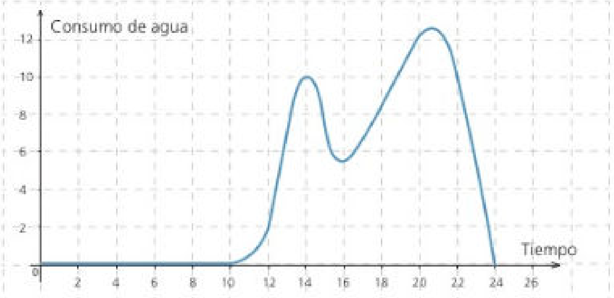


Figura 4

a) ¿En qué intervalo de tiempo el consumo de agua es nulo? ¿A qué consideran que se deba?

b) ¿En qué periodos se consume más agua?

c) ¿A qué hora se consume la máxima cantidad de agua?

d) ¿Cuál es el horario de funcionamiento del cine?

e) ¿Consideran que el consumo de agua durante un día entre semana sería el mismo? Justifiquen su respuesta.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. En grupo reflexionen acerca de la información que les puede proporcionar la gráfica que representa una situación.

Contesten lo que se les pregunta.

2. Un recipiente cilíndrico se llena de agua por medio de una llave de agua de caudal constante, es decir que la cantidad de agua que sale por el grifo no cambia conforme transcurre el tiempo.

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas describe el nivel de agua del recipiente conforme transcurre el tiempo?

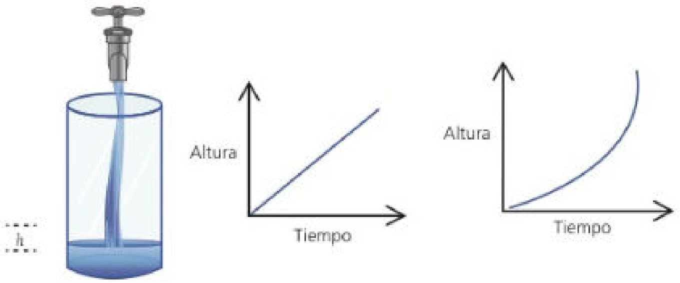


Figura 5

b) Expliquen ampliamente los razonamientos en los que basaron su elección.

3. Los recipientes que se muestran en la Figura 6 se llenan a través de una llave de agua de flujo constante. Tracen la gráfica que describe aproximadamente la altura que va alcanzando el agua en cada recipiente conforme pasa el tiempo.

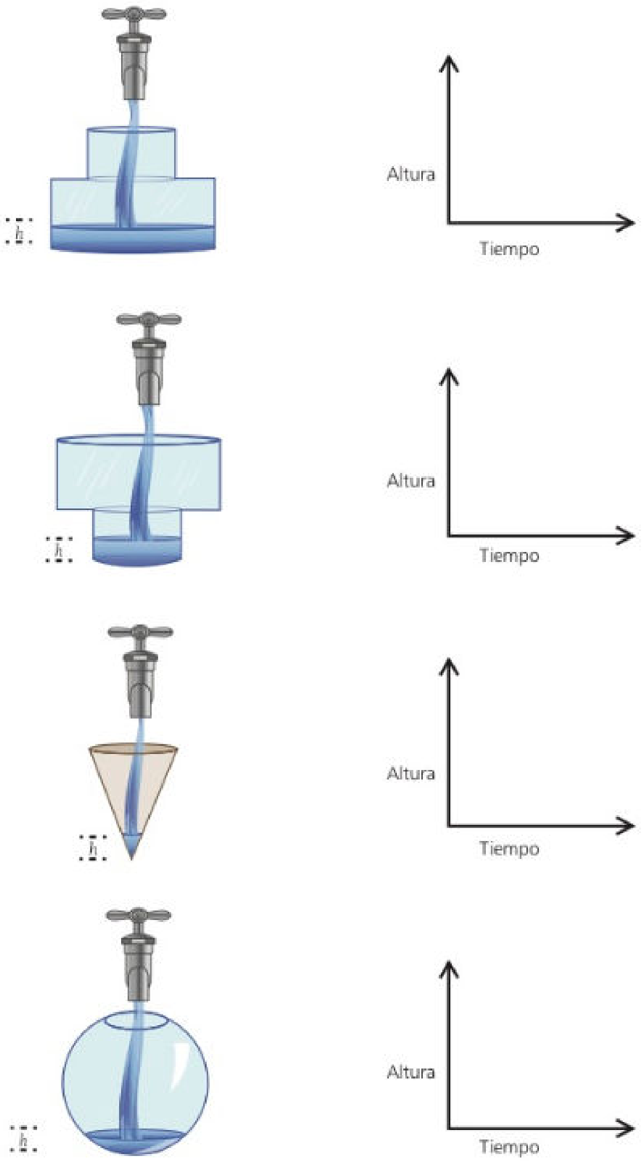


Figura 6

Relaciónalo con...

Educación ambiental para la sustentabilidad. Es importante promover el uso responsable de los recursos naturales como el agua, ya que la contaminación y consumo inadecuado pone en peligro la vida en muchas zonas del planeta.

Reúnanse con otros equipos y comparen sus respuestas y gráficas. Comenten entre todos acerca de las dificultades que surgieron parar identificar o trazar las gráficas de cada una de las situaciones y sobre las decisiones que tomaron como equipo para superar las dificultades.

4. Seleccionen el texto que mejor describa la gráfica de la Figura 7.

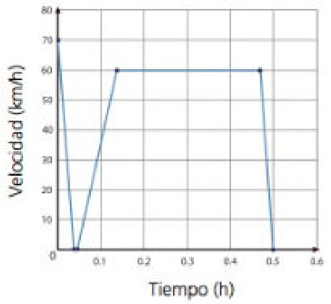


Figura 7

a) Dulce frena su auto ante la luz roja del semáforo, espera a la luz verde y al verla empieza a aumentar su velocidad hasta alcanzar 60 km/h, la cual mantiene durante un tiempo. Pero se detiene nuevamente ante la presencia de un semáforo.
b) Al acercarse a la tortillería Rodrigo frena su bicicleta lentamente. Espera a que lo atiendan, compra las tortillas y sube a su bicicleta para regresar rápidamente a casa pero a los 5 minutos se detiene para buscar sus llaves y al no encontrarlas se ve obligado a regresar a la tortillería.
c) El conductor de un montacargas se frena lentamente hasta detenerse para cargar la mercancía, la cual traslada a velocidad constante a pocos metros de ahí y se detiene nuevamente para descargar la mercancía

5. En su cuaderno planteen situaciones que se puedan modelar con las gráficas de la Figura 8.

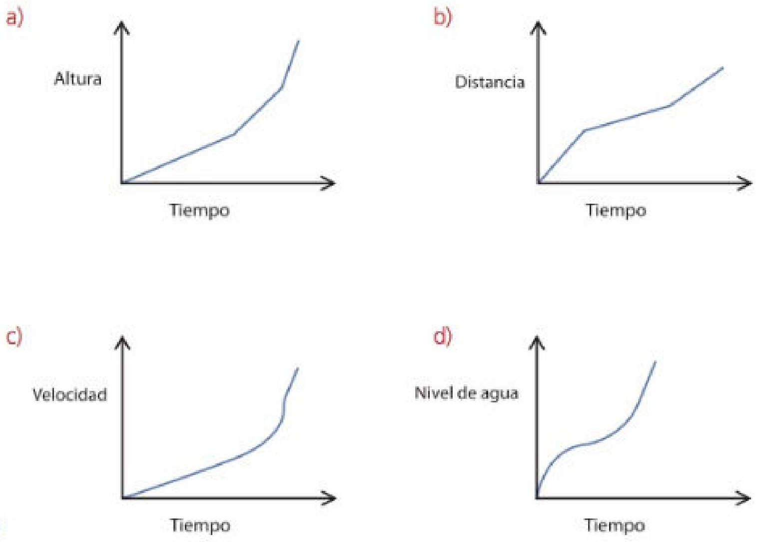


Figura 8

De forma grupal y con la guía de su profesor, compartan sus respuestas. Escuchen atentamente las aportaciones de sus compañeros y participen. En caso de dudas coméntenlas con su profesor para solucionarlas.

En la cima

Analicen cada uno de los siguientes planteamientos y respondan lo que se pregunta:

1. La gráfica de la Figura 9 representa la variación de la presión atmosférica con respecto de la altura medida a partir del nivel del mar.

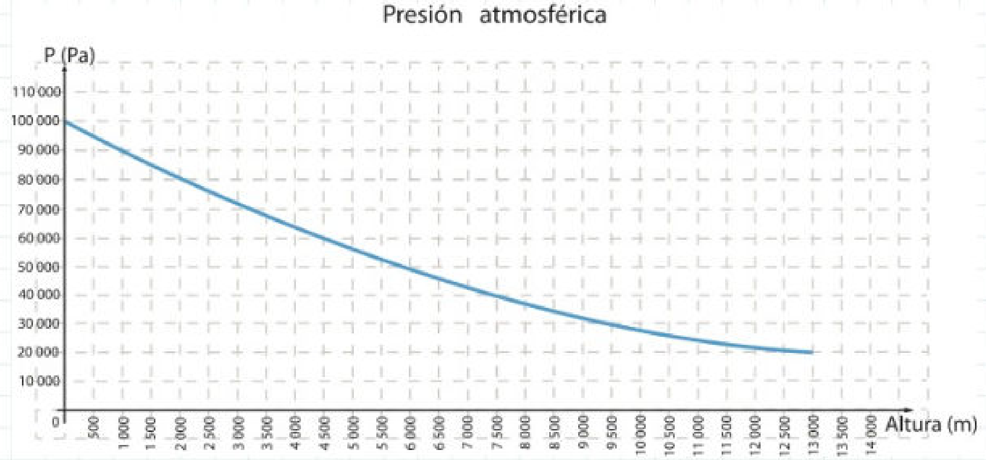
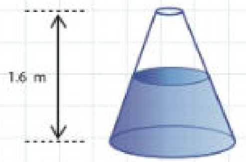


Figura 9

a) El monte Everest es la montaña más alta del mundo, tiene una altura de 8 844 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la presión atmosférica en su cima?
b) Un avión comercial en vuelo soporta mucho menos presión atmosférica que la que soporta una persona parada en la cima del Monte Everest. ¿La altura a la que vuela un avión comercial es mayor o menor que la altura de la montaña más alta del mundo?
c) El Iztacíhuatl es la montaña más alta de nuestro país. En su cima la presión atmosférica es de aproximadamente 5 200 Pa. ¿Cuál es aproximadamente su altura?
d) El mal de montaña es la falta de adaptación del organismo a la reducción de la presión atmosférica y niveles más bajos de oxígeno a grandes alturas. Ocurre normalmente a partir de los 2 400 m de altitud. ¿Cuál es la diferencia de presión entre esta altura y la presión a nivel del mar?

2. El recipiente de la Figura 10 de la siguiente página es llenado por un grifo que vierte una cantidad constante de agua. El tiempo que tarda el grifo en llenar el recipiente es 1 hora. Dibuja la gráfica que describa la altura del agua en el recipiente en función del tiempo durante los primeros 45 minutos.



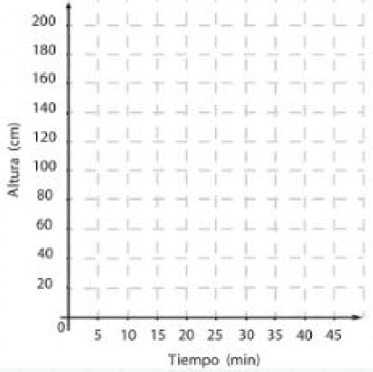


Figura 10

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten lo que describieron en cada situación. Expliquen cómo elaboraron la gráfica del Problema 2. Si tienen dudas, coméntelas con su profesor y lleguen a una conclusión.

Al terminar, mencionen al menos una situación de la vida cotidiana en la que un fenómeno se describa con una función lineal o no lineal.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica: http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mapas_contenido/mat/mat3_b3.php (última consulta: 17 de noviembre de 2013)
2. Accede al interactivo que corresponde a la sesión 20.2 Diversos problemas.
3. Analiza la información y elabora un resumen. Expón tu trabajo al grupo.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un golfista en un carro de golf recorre aproximadamente 790 m para ir del estacionamiento al campo. El carro se desplaza a 60 m/min en terreno plano, en terreno con elevación su velocidad disminuye a 48 m/min; mientras que en bajada su velocidad aumenta a 70 m/min. Obeva la figura 11 y responde:

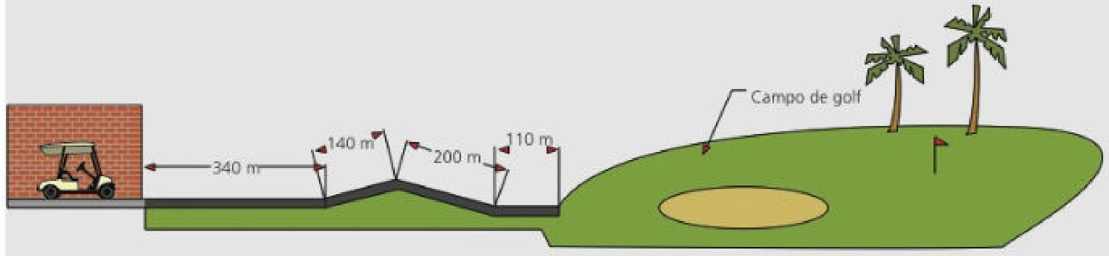


Figura 11

a) ¿Cuál es el tiempo que emplea del estacionamiento hasta el campo de golf?
b) Dibuja la gráfica que representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el carro?
c) Dibuja la gráfica que representa el movimiento del carro.

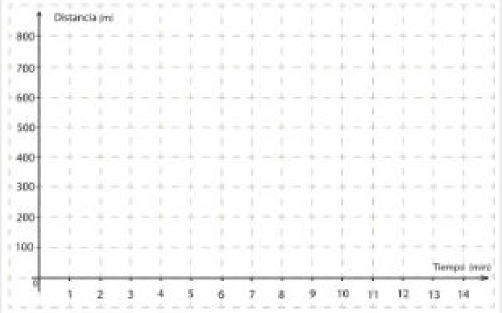


Figura 12

2. En camiones llamados cisternas, como por ejemplo, los que transportan gasolina, se utiliza un tubo de llenado que llega hasta el fondo como se muestra en la Figura 13.
   a) Si el flujo de gasolina es constante, ¿cómo es la gráfica que describe la altura del nivel del líquido con respecto al tiempo de llenado del camión cisterna? Dibújala en tu cuaderno.
   b) La altura del nivel de gasolina que va alcanzando por cada minuto que transcurre, ¿es una relación lineal? ¿Por qué?

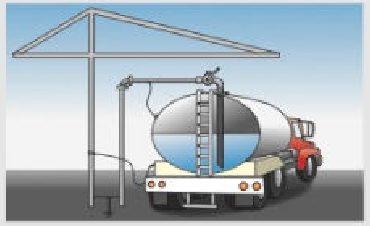


Figura 13

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las repuestas a las que llegaron.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en dar respuesta a distintos cuestionamientos sobre la relación entre las variables altura y tiempo de llenado de recipientes.			
Propuso algún recipiente relacionado con alguna gráfica.			
Participó en la comparación de respuestas y en la discusión grupal de los planteamientos de reflexión.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 20
Eventos independientes

Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto).

Nexos

En la Lección 6 de este libro conociste cuál es la escala de la probabilidad e identificaste las características de eventos complementarios, eventos mutuamente excluyentes e independientes. En la Lección 13 resolviste problemas que implicaban calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma).

Explor@

Resuelve el siguiente planteamiento.

1. Valeria y Rodrigo juegan a lanzar un dado. Analiza los enunciados de cada uno de los incisos y escribe delante de ellos si los eventos entre comillas son independientes, mutuamente excluyentes, complementarios o no pertenecen a estas clasificaciones.

   a) En el primer lanzamiento Valeria dice: "Sale el número 3" y Rodrigo dice: "Sale un número impar".

   ____

   b) En el segundo lanzamiento Valeria dice: "Sale un número múltiplo de 3" y Rodrigo dice: "Sale un número par".

   ____

   c) En el tercer lanzamiento Valeria dice: "Sale el número 5" y Rodrigo dice: "Sale un número distinto de 5".

   ____

2. Si a lo que afirma Valeria se le llama evento A y lo que afirma Rodrigo evento B, escribe los casos favorables de cada uno de los eventos del problema anterior.

   a) $A = \{ \quad \}$, $B = \{ \quad \}$

   b) $A = \{ \quad \}$, $B = \{ \quad \}$

   c) $A = \{ \quad \}$, $B = \{ \quad \}$

3. Escribe tres ejemplos de eventos independientes y explica por qué lo son.

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Comenten cuándo se considera que dos eventos son independientes y por qué ninguna de las parejas de eventos lo son.

En construcción

1. Completen los recuadros y juntos contesten las preguntas.
   Caso 1: Lanzar un dado dos veces.

Experimento A. Se tira un dado.	Experimento B. Se tira un dado.
Espacio muestral E= { }	Espacio muestral E= { }
Resultado: cae un número múltiplo de 2.	Resultado: cae un número múltiplo de 3.

Tabla 2

   a) Escriban los elementos de cada uno de los eventos que ocurrieron en los experimentos A y B y calculen su probabilidad.

   M: Múltiplo de 2 — N: Múltiplo de 3

   $M = \{ \quad \}$ — $N = \{ \quad \}$

   $P(M) =$ — $P(N) =$

   b) ¿Los eventos M y N son independientes? ¿Por qué?

   Caso 2: Lanzar un dado dos veces.

Experimento A. Lanzar un dado	Experimento B. Lanzar un dado
Espacio muestral E= { }	Espacio muestral E= { }
Resultado: cae un número impar.	¿Cuál es la probabilidad de que salga nuevamente un número impar?

Tabla 3

   a) Reflexionen acerca de por qué al calcular la probabilidad del segundo lanzamiento no se elimina el número impar que salió en el primer lanzamiento. Escriban las conclusiones a las que llegaron.
   b) Calculen la probabilidad de que en el experimento A cayera un número impar.
   c) ¿Cómo son las probabilidades de ambos eventos? ¿Por qué?
   d) Los eventos "sale un número impar" y "sale un número impar", ¿son independientes? ¿Por qué?

   Caso 3: Lanzar un dado y una moneda.

Experimento A.
Espacio muestral E= { }
Resultado: cae un número impar.

Tabla 4

   a) Calculen la probabilidad de obtener 3 al lanzar el dado, sabiendo que se obtuvo sol al lanzar la moneda.
   b) ¿Para calcular la probabilidad de obtener 3 al lanzar el dado tomaron en cuenta el resultado de lanzar la moneda? ¿Por qué?

c) Calculen la probabilidad de que al lanzar la moneda y el dado, caiga sol en la moneda.
d) ¿Qué entienden por calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda y un dado se obtenga sol y el número 3?

Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus respuestas. Comenten cómo se puede saber si dos eventos son independientes y cómo se calcula su probabilidad.

2. Determinen el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					(1,6)
2					(2,5)	
3				(3,4)		
4			(4,3)			
5		(5,2)				
6	(6,2)					(6,6)

Tabla 5

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas caras aparezca el número 2?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de ambas caras sea 7 o que ambos números sean iguales?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de ambas caras sea 7 y que ambos números sean iguales?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de ambas caras sea 4 y que ambos números sean iguales?

Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Comenten cómo fue que llegaron a ellas. Después, en forma grupal, respondan los siguientes cuestionamientos:

- En el caso del inciso a, ¿se puede obtener el mismo resultado considerando la probabilidad de que salga 2 en cada uno de los dados?
- La probabilidad de que salga 2 en un dado, ¿altera la probabilidad de que salga 2 en el otro dado?
- En el caso del inciso d, ¿los eventos son independiente? ¿Por qué?

3. Una caja contiene varias canicas de colores como se muestra en la Figura 1.
El experimento consiste en extraer al azar una canica, devolverla a la caja.
Si se realizan dos extracciones, ¿cuál es la probabilidad de elegir al azar una canica roja (evento *A*) en la primera extracción y una canica amarilla (evento *B*) en la segunda?

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento *A*?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento *B*?
c) ¿Qué tipo de eventos son *A* y *B*?
d) Si al realizar la primera extracción la canica no se regresa a la urna ¿se tienen los mismos resultados? ¿Por qué?

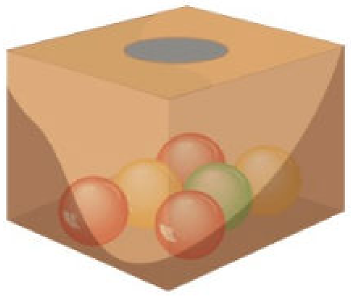


Figura 1

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten cómo fue que llegaron a ellas. Después, en forma grupal discutan acerca de cómo se calcula la probabilidad de dos eventos independientes.

En la cima

1. Se lanzan simultáneamente un dado y una moneda.
a) Calculen la probabilidad de que caiga sol (evento *A*) y el número 4 (evento *B*).
b) Calculen la probabilidad de que caiga águila (evento *A*) y el número 2 (evento *B*).
c) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga águila (evento *A*) y un número mayor que 4 (evento B)?
d) ¿Qué tipos de eventos son *A* y *B* en cada inciso?

2. El diagrama de árbol de la Figura 1 muestra todos los posibles resultados del experimento que consiste en lanzar una moneda tres veces.

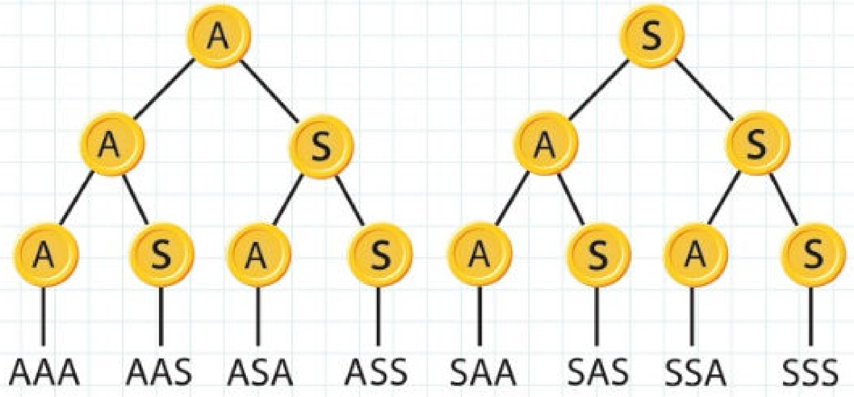


Figura 2

a) ¿El resultado "que en todas las ocasiones salga águila" responde a eventos independientes? Por qué?
b) Calculen la probabilidad de obtener águila en cada lanzamiento.
c) Calculen la probabilidad de obtener al menos un sol en el experimento.

3. Lean los siguientes experimentos.

S1: La mamá de Enrique y la tía de Ana están embarazadas y próximamente darán a luz a sus bebés. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas den a luz a un hijo varón?
S2: Se lanza un dado. Sabiendo que cayó un número par, se calcula la probabilidad de que sea múltiplo de tres.
S3: Una urna contienen 7 bolas negras y tres blancas. Calcula la probabilidad de elegir al azar tres bolas blancas si en cada extracción la bola elegida no se regresa a la urna.
S4: De una baraja de 40 cartas se elige una carta y se regresa a la baraja para elegir otra. ¿Cuál es la probabilidad de elegir dos ases?

De los tres experimentos anteriores, analicen en cuál de ellos se cumple la siguiente condición:

$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$ (Regla del producto)

a) ¿Qué tipo de eventos son A y B donde se cumple la condición anterior?
b) ¿Qué se tiene que hacer para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes utilizando la regla del producto?
c) ¿Qué modificarían a los experimentos en los que no pueden utilizar la regla del producto para poder usarla?
d) Escriban en su cuaderno una conclusión al respecto.

Comparen sus respuestas con las de otros equipos, así como sus conclusiones. Luego, de forma grupal y con la guía de su maestro realicen una lluvia de ideas acerca de qué condiciones deben cumplir dos o más eventos para utilizar la regla del producto.

A partir de dos o más eventos de una experiencia aleatoria, se pueden determinar otros eventos. Uno de los más comunes es el evento **conjunción** de dos eventos.

Si los eventos A y B de una experiencia aleatoria son independientes, entonces:

$$P(A \text{ y } B) = P(A)P(B) \text{ (Regla del producto)}$$

Inversamente: Si dos eventos A y B cumplen la condición anterior, entonces los eventos son independientes.

De manera grupal comenten en qué situaciones de la vida cotidiana la regla del producto les puede ayudar a tomar una decisión.

conjunción. De dos eventos A y B es un tercer evento, denotado por (A y B), que representa que en una experiencia aleatoria ocurren simultáneamente ambos eventos.

RDT

Visita la página electrónica http://www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U12_L2_T2_text_final_es.html (última consulta: 26 de junio de 2013).

Analiza la información que se da con respecto a eventos independientes, así como el cálculo de probabilidades de eventos independientes. Elabora un resumen de la información y organiza una exposición de tu trabajo al grupo.

Destreza y estrategia

Resuelve en tu cuaderno el siguiente problema.

1. El gerente de una cadena de restaurantes lanzó una campaña publicitaria para un nuevo restaurante. Para ello, instaló cuatro anuncios panorámicos en la carretera a la entrada de la ciudad, y sabe, por su experiencia, la probabilidad de que cada anuncio sea visto por un conductor escogido aleatoriamente.

La probabilidad de que el primer anuncio sea visto por un conductor es de 0.75. La probabilidad de que el segundo sea visto es de 0.82, la probabilidad para el tercero es de 0.87 y la del cuarto es de 0.9.

Si el evento consiste en que un conductor vea cualquiera de los anuncios, independientemente de si ha visto o no los demás; ¿cuál es la probabilidad de que:

a) Los cuatro anuncios sean vistos por un conductor escogido aleatoriamente?
b) El primero y el cuarto anuncios sean vistos, sin que el segundo y el tercero sean notados?
c) Solamente uno de los anuncios sea visto?
d) Ninguno de los anuncios sea visto?
e) El tercero y cuarto anuncios no sean vistos?

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par y menor que 4 al lanzar un dado? Sabiendo que ya salió par, ¿cuál es ahora la probabilidad que sea menor que 4?

3. Se lanzan cinco volados consecutivos y en todos ellos ha caído águila. ¿Cuál es la probabilidad de que en el sexto volado también caiga águila?

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las repuestas a las que llegaron.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Trabajé en equipo.			
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó las características de los eventos independientes.			
Propuso alguna conclusión sobre lo que se tiene que hacer para calcular la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes utilizando la regla del producto.			
Participó en la comparación de respuestas y en la discusión grupal de los planteamientos de reflexión.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lee los textos y resuelve los problemas que se plantean.

Distancias o alturas

La Figura 1 ilustra dos maneras, utilizadas habitualmente por las guías y exploradores, para estimar alturas y distancias, recurriendo a la semejanza de triángulos.

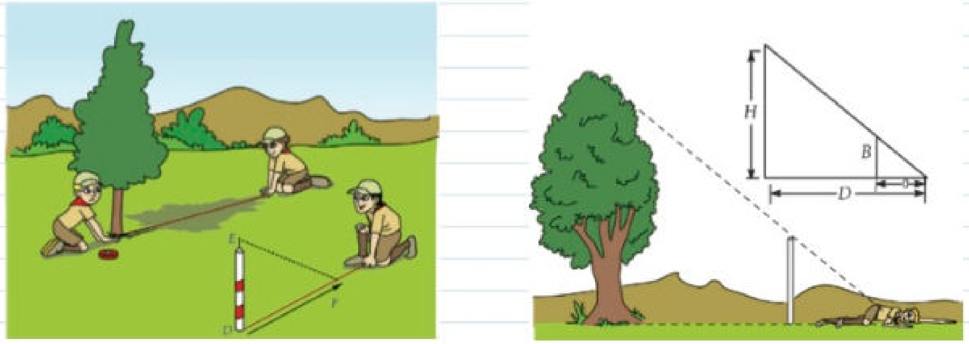


Figura 1

1. Elige uno de los métodos y con él plantea un problema. Resuélvelo y registra tus operaciones.

2. Un explorador desea calcular el ancho de una zanja; para ello se coloca a una distancia del borde haciendo coincidir su mirada con el borde de la zanja y con el fondo de la pared opuesta como se muestra en la Figura 2.

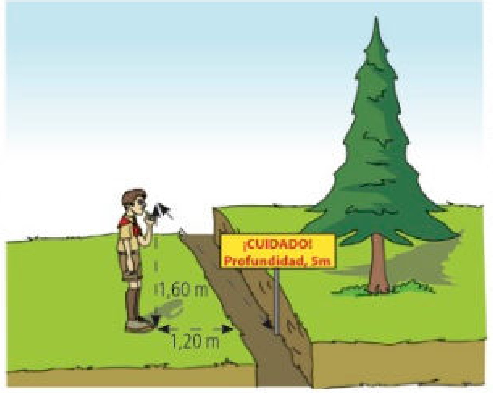


Figura 2

¿Cuál es el ancho de la zanja? Registra tus operaciones.

Diseños geométricos

1. Los lados de una lámina triangular miden 3, 4 y 5 cm, como se muestra en la Figura 3. Se corta otra semejante cuyo lado menor mide 15 cm.

   a) ¿Cuál es la razón de semejanza?
   b) Halla los otros dos lados de la segunda lámina.
   c) La forma de la primera lámina es un triángulo rectángulo, ¿se puede asegurar que la segunda lámina también lo será? Da argumentos matemáticos.

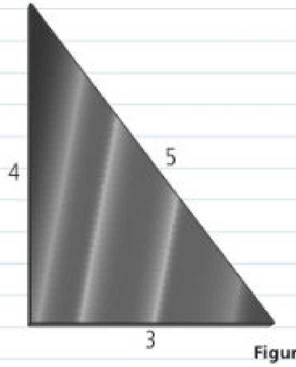


Figura 3

Diseños geométricos

El señor Clemente trabaja como albañil y cuando construye muros cobra por metro cuadrado construido. En esta ocasión ha construido dos muros, los cuales se modelan en la Figura 4, ambos muros abarcan una superficie de 78 m^2.

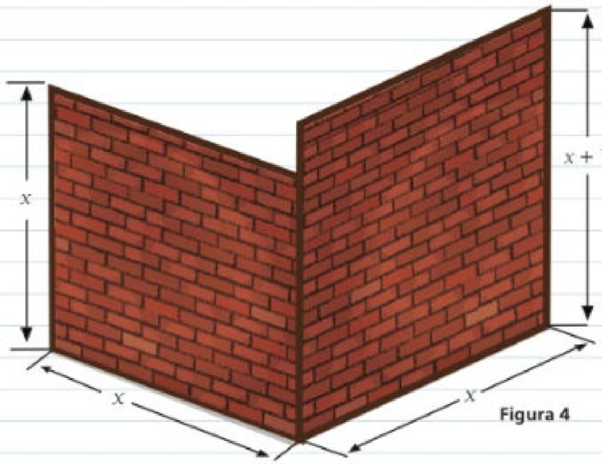


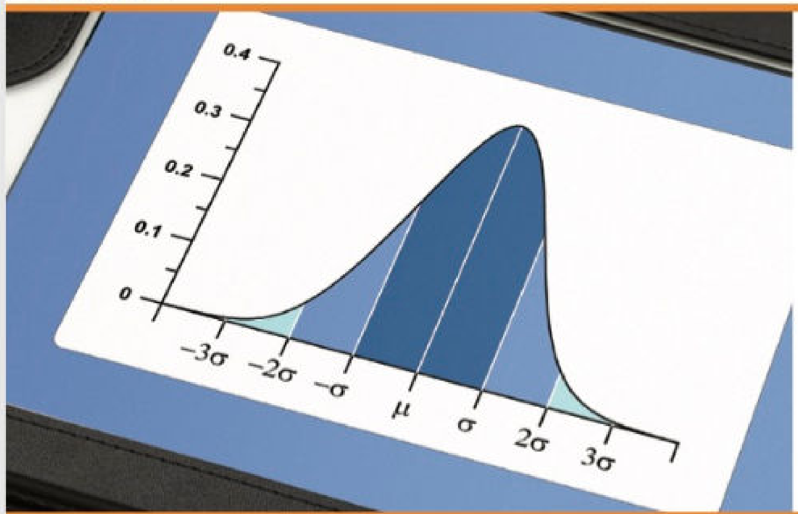
Figura 4

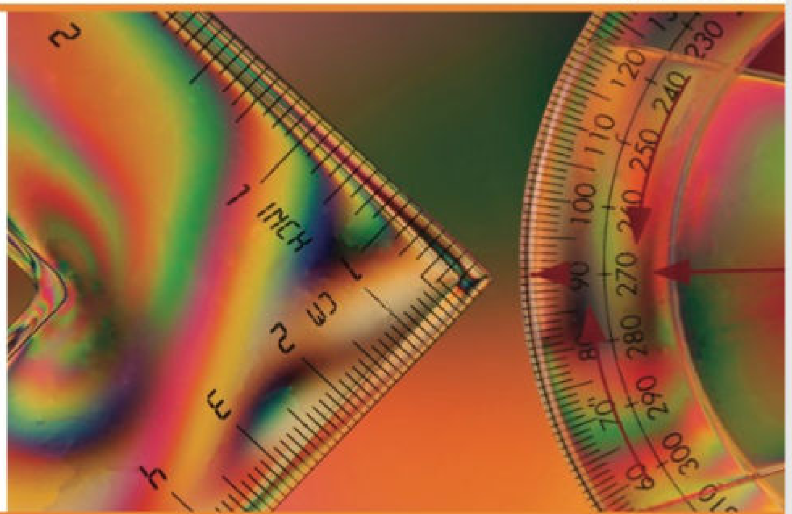
1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones debe resolverse para calcular las medidas de los muros?

   a) $2x^2 + x - 78 = 0$ **b)** $x^2 + 2x + 78 = 0$
   c) $2x^2 + x + 77 = 0$ **d)** $x^2 + 2x - 77 = 0$

2. Resuelve la ecuación que elegiste y calcula las medidas de los muros. Muestra tus operaciones.

Bloque 4





Aprendizajes esperados:

- Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.
- Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

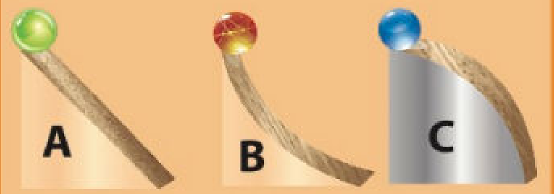
Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Acertijo

Trayectoria

Las siguientes piezas tienen la misma base y altura. ¿Cuál es la trayectoria por la que baja más pronto una canica?



		Dosificación del docente
Lección 21. Sucesiones cuadráticas	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.	
Lección 22. Sólidos de revolución	Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.	
Lección 23. Relaciones entre elementos de una recta	Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	
Lección 24. Razones trigonométricas	Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.	
Lección 25. Problemas trigonométricos	Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	
Lección 26. Razón de cambio	Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	
Lección 27. Medidas de variabilidad	Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.	

Lección 21
Sucesiones cuadráticas

Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

Nexos

En grados anteriores has construido sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada. También has formulado reglas generales de la forma $an + b$, donde n es el número de orden del término de una sucesión y a y b son números enteros que definen sucesiones con progresión aritmética de números y de figuras. Estos conocimientos te serán de mucha utilidad para la resolución de los problemas de esta lección.

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. En la antigua Grecia, para los pitagóricos todo estaba basado en relaciones numéricas enteras o fraccionarias, por ello clasificaron los números naturales en números triangulares, cuadrados y rectangulares, entre otros.

En la Tabla 1 se han construido algunos de esos números, analízalos cuidadosamente y a partir de tus observaciones completa la Tabla 2.

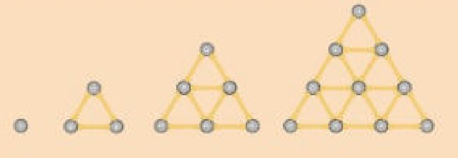
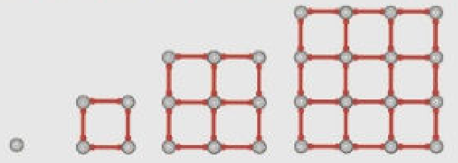
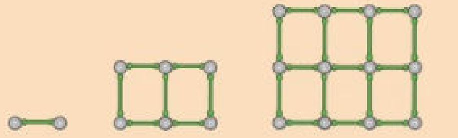
Números triangulares (T_n)	
Números cuadrados (C_n)	
Números rectangulares (R_n)	

Tabla 1

Orden (n)	T_n	C_n	R_n
1	1	1	2
2	3	4	6
3	6	9	12
4	10	16	20
5			
6			
7			
8			

Tabla 2

a) ¿Cómo obtuviste los números triangulares que faltaban en la Tabla 2?
b) ¿Y los números rectangulares faltantes?
c) ¿El número cuadrado es igual al cuadrado del número de orden?, ¿por qué?
d) ¿Qué otras relaciones puedes establecer entre las 4 columnas de números? Escríbelas en tu cuaderno.

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Después, de manera grupal y con la guía de su profesor, compartan entre todos las estrategias que emplearon para completar la Tabla 2 y para establecer las relaciones que había entre las columnas de números.

En construcción

Realicen lo que se pide en cada actividad.

1. La Tabla 3 muestra los primeros seis términos de una sucesión de números triangulares (T_n), los primeros términos de una sucesión de números cuadrangulares (C_n) y de números rectangulares (R_n).

Orden (n)	T_n	C_n	R_n
1	1	2	2
2	3	4	6
3	6	9	12
4	10	16	20
5	15	25	30
6	21	36	42

Tabla 3

Analicen la tabla detenidamente y determinen cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Subráyenlas.

- Un número cuadrado es igual al cuadrado de su número de orden ($C_n = n^2$).
- Un número cuadrado de orden n es igual al número rectangular de ese mismo orden, ($C_n = R_n$).

- Un número rectangular de orden n es igual al doble del número triangular de ese mismo orden, es decir, $R_n = 2T_n$.
- Un número triangular de orden n es la mitad del número rectangular de ese mismo orden ($T_n = \frac{R_n}{2}$).
- Al sumar un número cuadrado con su respectivo número de orden, resulta el número rectangular de ese mismo orden, es decir, $R_n = C_n + n$.
- Un número cuadrado es igual a un número triangular más el número de orden ($C_n = T_n + n$).
- Al sumar un número cuadrado con su número de orden, resulta el número cuadrangular de ese mismo orden, es decir, $R_n = n + C_n$.

a) A partir de las afirmaciones verdaderas que determinaron, escriban una fórmula general para cada sucesión de números (triangular, cuadrado y rectangular) en función de n.

	T_n	C_n	R_n
Fórmula general			

Tabla 4

b) Utilicen las fórmulas generales que propusieron para obtener los términos 10, 50 y 100 de cada sucesión. Anoten sus resultados en la Tabla 5.

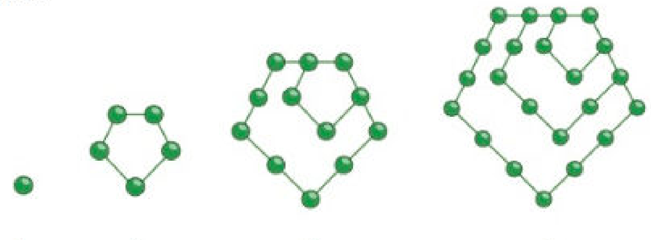
Orden (n)	T_n	C_n	R_n
10			
50			
100			

Tabla 5

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si tienen dudas, pídanle ayuda a su profesor y en plenaria comenten entre todos acerca de qué estrategias utilizaron para hallar las fórmulas generales de cada sucesión.

Realicen las siguientes actividades.

2. La Figura 1 muestra una sucesión de números pentagonales, analícenla y completen la Tabla 6 de la siguiente página. Luego, busquen las relaciones entre las diferentes columnas de números y escriban la fórmula general que representa la sucesión de números pentagonales.



1 2 3 4

Figura 1

Orden (n)	T_n	C_n	R_n	P_n
1	1	2	2	
2	3	4	6	
3	6	9	12	
4	10	16	20	
5	15	25	30	
6	21	36	42	
Fórmula general	$T_n=$	$C_n=$	$R_n=$	$P_n=$

Tabla 6

3. Jacobo, un alumno de tercer grado de secundaria, dijo al observar el pentágono de la Figura 2 que estaba formado por dos números triangulares del mismo orden más otro de un orden superior a los anteriores.

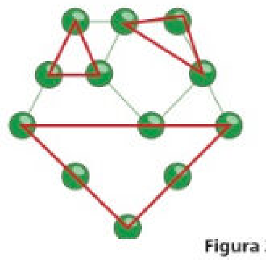


Figura 2

a) ¿Es cierto lo que dice Jacobo? Justifiquen su respuesta.
b) Tracen los tres números triangulares en el pentágono de orden 5 de la Figura 3, para verificar que la afirmación de Jacobo se cumple.
c) ¿La fórmula general de la sucesión de números pentagonales se podría determinar por la relación $P_n = T_n + 2T_{n-1}$? Justifiquen su respuesta.
d) Prueben la fórmula sustituyendo algunos valores para n.

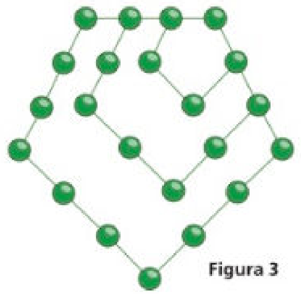


Figura 3

Comparen sus respuestas con otros equipos. Luego con la guía de su maestro discutan si es correcto que $P_n = C_n + T_{n-1}$. Discutan y reflexionen acerca de si existe una única fórmula para representar los números pentagonales.

En la cima

1. Analicen la siguiente información. Luego realicen lo que se les pide.

Para saber si una sucesión es lineal o cuadrática primero se deben calcular las diferencias entre los términos consecutivos de la sucesión, si las diferencias obtenidas son iguales, la sucesión es lineal. Si no lo son, se deben calcular las diferencias entre los resultados obtenidos; si las diferencias obtenidas son iguales, la sucesión es cuadrática. En caso contrario la sucesión no es lineal ni cuadrática.

Un ejemplo de una sucesión cuadrática es el que se muestra en la Tabla 7.

	Orden (n)	1	2	3	4	5	6
Nivel 1	Sucesión original	1	3	6	10	15	21
Nivel 2	Primeras diferencias	2	3	4	5	6	
Nivel 3	Segundas diferencias		1	1	1	1	

Tabla 7

Para obtener la fórmula general $an^2 + bn + c$ de la sucesión cuadrática, a cada uno de los valores de las columnas se le asocia con las siguientes expresiones:

Nivel 1: $a + b + c$
Nivel 2: $3a + b$
Nivel 3: $2a$

Por ejemplo, para encontrar la fórmula general de la sucesión cuadrática anterior se puede establecer, con los valores correspondientes al Nivel 1, 2 y 3, el siguiente sistema de ecuaciones:

$a + b + c = 1$
$3a + b = 2$
$2a = 1$

a) Resuelvan el sistema de ecuaciones y determinen los valores a, b y c.
b) Sustituyan en la expresión $an^2 + bn + c$ los valores que obtuvieron para hallar la ecuación cuadrática que representa al n-ésimo término de la sucesión.
c) ¿La expresión que obtuvieron es igual a la fórmula general de la sucesión de números triangulares de la actividad 2? Argumenten.

2. Aplicando el método anterior, hallen el n-ésimo término de la sucesión cuadrática:

3, 6, 13, 24, 39,...

a) ¿Cuál es el valor del décimo término?
b) ¿Y cuál es el valor del término de las posiciones 100 y 1 000?

En forma grupal, realicen una puesta en común de sus procedimientos algebraicos; luego entre todos escriban una conclusión general de los conocimientos que adquirieron en las actividades de esta sección.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Los siguientes arreglos forman una sucesión de números hexagonales.

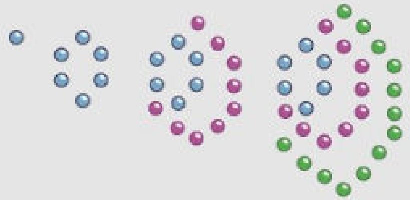


Figura 4

a) ¿Cuál es la regla general de la sucesión numérica?
b) ¿El número 190 pertenece a la sucesión?

2. Encuentra la regla general de cada una de las siguientes sucesiones.

a) 1, 3, 9, 19, 33... Regla general:_______________
b) 1, 5, 9, 13, 17... Regla genera:_______________
c) 3, 6, 11, 18, 27... Regla general:_______________
d) 5, 8, 12, 17, 22;... Regla general:_______________

Al terminar, solicita el apoyo de tu profesor para que juntos organicen en el grupo una puesta en común de las repuestas a las que llegaron.

RDT

1. Visita la página electrónica http://www.slideshare.net/alexiolivier/metodo-de-diferencias-para-obtener-la-regla-de-una-sucesion (última consulta: 17 de noviembre de 2013).

2. Busca la sección "Diferencias finitas" y analiza la información que se te proporciona.

3. Realiza un resumen de la información y luego organiza una exposición de tu trabajo para el grupo.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Comparé mis resultados de forma respetuosa.			
Escuché con atención y respeté la intervención de mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en buscar relaciones entre los números triangulares, cuadrados y rectangulares.			
Propuso expresiones generales de la forma $an^2 + bn + c$ para representar el enésimo término de una sucesión cuadrática.			
Participó en la comparación de respuestas y en la discusión grupal de los planteamientos de reflexión.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 22
Sólidos de revolución

Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos.

Nexos

Los conocimientos adquiridos en grados anteriores acerca de las características de figuras geométricas y en segundo grado de secundaria con respecto al tema de prismas y pirámides, te serán de utilidad para analizar las características de los cuerpos geométricos de la presente lección.

Explora

Analicen el siguiente planteamiento y respondan lo que se pregunta.

1. Construyan varios banderines empleando popotes y papel grueso. Para construir los banderines tracen los triángulos que se muestran en la Figura 1, entre ustedes, determinen las medidas para la construcción de los triángulos considerando las siguientes indicaciones.

- Para el $\triangle ABC$, agrega una pestaña de 1 cm al lado AB.
- Para el $\triangle DEF$, agrega una pestaña de 1 cm al lado DE.
- Para el $\triangle GHI$, agreguen la pestaña a cualquier lado del triángulo.
- Para el $\triangle JKL$, agreguen la pestaña al lado JK.

Peguen los popotes a las pestañas para formar los banderines.

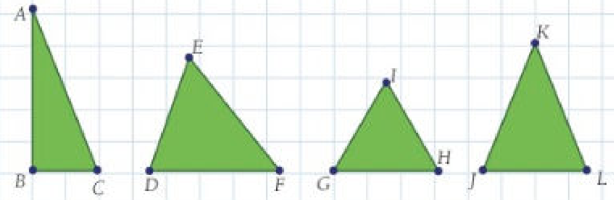


Figura 1

a) Sin girar sus banderines anticipen qué cuerpo geométrico se describe al girar cada uno de ellos, utilizando el popote como eje de rotación o eje de giro.
b) Giren sus banderines y observen los cuerpos geométricos que se forman. Con base en sus observaciones y conocimientos geométricos completen la Tabla 1.
c) ¿Cómo son entre sí los cuatro cuerpos geométricos que obtuvieron?
d) Giren sus banderines: cambien la dirección del giro y aumenten o disminuyan su velocidad. Anoten sus observaciones y reflexionen si los cuerpos geométricos que obtuvieron son diferentes a los que anotaron en la Tabla 1.
e) Escriban sus conclusiones acerca de la actividad.

Características	$\triangle ABC$	$\triangle DEF$	$\triangle GHI$	$\triangle JKL$
Nombre y características del triángulo.				
Cuerpo geométrico generado al dar una vuelta (360°).				
Número de bases del cuerpo generado y su forma.				
Número de caras del cuerpo generado y su forma.				
Otras características.				

Tabla 1

Reúnanse con dos parejas y comenten sus experiencias acerca de la actividad. Después, de manera grupal, identifiquen las semejanzas y las diferencias que existen entre los 4 cuerpos geométricos generados.

En construcción

1. Análogamente al procedimiento de la actividad anterior, construyan banderines tomando como base los cuadriláteros de la Figura 2.

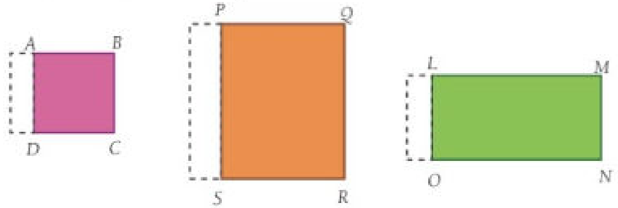


Figura 2

a) Sin girar sus banderines anticipen qué cuerpo geométrico se describe al girar cada uno de ellos.
b) Giren sus banderines y observen los cuerpos geométricos que se forman. Completen la Tabla 2 con base en sus observaciones y conocimientos geométricos.

	Cuadrado *ABCD*	Rectángulo	
		PQRS	*LMNO*
Nombre y características del cuadrilátero (medida de la base, medida de la altura, etcétera).			
Cuerpo geométrico generado al dar una vuelta (360°).			
Número de bases que posee el cuerpo geométrico generado y su forma.			
Número de caras que posee el cuerpo geométrico generado y su forma.			
Otras características.			

Tabla 2

c) ¿En todos los casos se generó el mismo cuerpo geométrico? Justifiquen.
d) Escriban las diferencias y las semejanzas que existen entre los tres cuerpos geométricos generados.
e) Si cambian la ubicación del eje de giro, ¿se generan los mismos cuerpos? Compruébenlo.

Reúnanse con otra pareja y compartan sus experiencias de la actividad. Luego, entre todos propongan otra u otras figuras planas a partir de las cuales se pueda generar un cilindro. Expliquen claramente el procedimiento que realizarían con esa(s) figura(s) para generar el cilindro.

2. Tracen en papel grueso las figuras planas de la Figura 3. Utilicen tres popotes como eje y peguen a cada uno de éstos una figura.

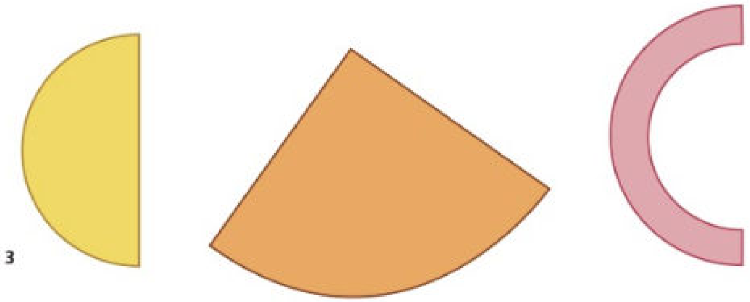


Figura 3

a) ¿Qué figuras geométricas son las que se muestran en la Figura 3?
b) Sin girar sus figuras anticipen qué cuerpo geométrico se describe al girar cada una de ellas.
c) Giren las figuras y observen los cuerpos geométricos que se forman. Describan sus características como número de bases y caras del cuerpo geométrico generado, la forma de las mismas, etcétera.
d) ¿En todos los casos se generó el mismo cuerpo geométrico? Justifiquen.
e) Escriban las diferencias y las semejanzas que existen entre los tres cuerpos geométricos generados.

Reúnanse con otra pareja y compartan sus experiencias de la actividad. Luego, entre todos sustenten cómo generaron conos y cilindros a partir de una figura plana y escriban una conclusión sobre los sólidos generados por la rotación de figuras planas con respecto a un eje. Al terminar complementen sus conclusiones con la siguiente información.

Los **sólidos de revolución** se generan al girar 360° una figura plana alrededor de un eje.

El **cono recto** es un sólido que resulta al girar un triángulo recto alrededor de uno de sus catetos. El cateto fijo es el eje del cono y la longitud de dicho cateto es la altura. La rotación del otro cateto genera un círculo perpendicular a la altura y corresponde a la base del cono; el radio de esta base es el radio del cono. La hipotenusa del triángulo que se rota es la generatriz. El punto de intersección de la generatriz con el eje se llama vértice del cono.

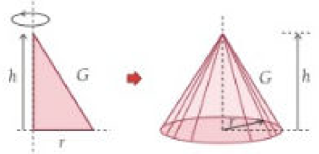


Figura 4

El **cilindro recto** se genera al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina eje de rotación (AB) y el lado paralelo a él es la generatriz (CD). En un cilindro distinguimos la superficie lateral y dos bases que son dos círculos congruentes. La altura del cilindro es la distancia entre las dos bases (AB). En un cilindro recto la altura y la generatriz miden lo mismo. El cilindro recto también se puede generar al trasladar un círculo en dirección perpendicular al plano que lo contiene.

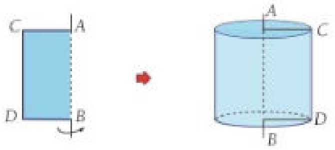


Figura 5

La **esfera** es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo alrededor del diámetro. La recta en la que se sitúa éste es el eje de revolución (AB) y la semicircunferencia la generatriz.

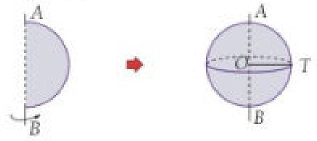


Figura 6

Ubiquen las partes de cada uno de los sólidos de revolución estudiados. Después contesten:

- ¿Un cono tiene más de dos vértices?
- ¿Un cilindro recto se puede generar por rotar un rectángulo 280°?
- ¿Una esfera se puede generar por rotar un círculo? Sustenten.

Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos.

En la cima

Realicen las siguientes actividades.

1. Consigan un tubo de cartón como el del papel higiénico (u otro parecido) y con él realicen el siguiente procedimiento:

a) Midan el largo del tubo y tracen en su cuaderno una línea vertical de esa medida. Utilicen la base del tubo para trazar en los extremos de la recta el contorno circular superior e inferior del tubo.
b) Localicen el centro de las circunferencias.
c) A lo largo del tubo tracen un segmento de recta, como se muestra en la Figura 7, y córtenlo guiándose por ella.

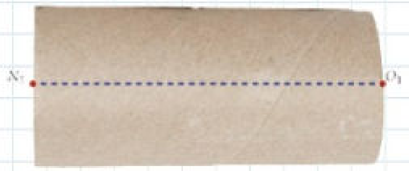


Figura 7

d) Desenrollen el tubo y traten de alisarlo lo más posible. Después colóquenlo entre los círculos trazados y remárquenlo para formar el desarrollo plano del cilindro.

Con base en su construcción contesten:

e) Cuando desenrollan la cara curva del tubo y la alisan lo más posible, ¿qué figura plana se forma?
- Anoten sus medidas: largo ________, ancho ________, área ________.

f) Anoten las siguientes medidas:
- Altura del tubo:
- Radio:
- Perímetro de la base del tubo:

g) Comparen el perímetro de la base del tubo con el largo del rectángulo, ¿cómo son?

h) ¿Cómo se relacionan entre sí la altura del tubo con el ancho del rectángulo?

Analicen sus respuestas y escriban una o varias conclusiones acerca de la relación que existe entre las medidas del desarrollo plano del cilindro y las medidas del cilindro correspondiente.

2. Determinen la medida del largo de los desarrollos planos que se muestran en la Figura 8 y calculen el perímetro de cada base.

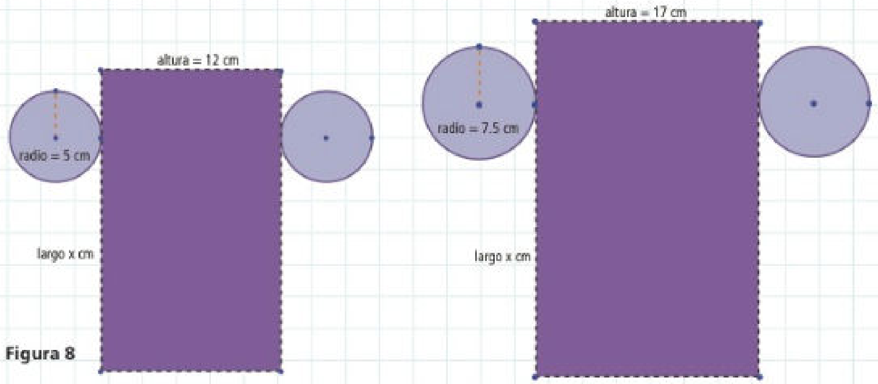


Figura 8

Realicen la siguiente actividad.

3. Consigan un cono de papel como los que se utilizan para beber agua u otro objeto de forma cónica que sirva para realizar la siguiente actividad.

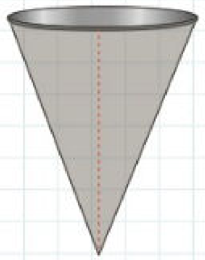


Figura 9

a) Apoyen el cono en su cuaderno y tracen el círculo que les puede servir de tapa. Enseguida localicen su centro y determinen la medida del radio y del perímetro.

b) Identifiquen la altura del cono y mídanla.

c) Tracen un segmento recto a lo largo del cono, como se muestra en la Figura 9, y guiándose por él recorten el cono. Alísenlo lo más posible y colóquenlo al lado del círculo que trazaron en su cuaderno.

d) Marquen el contorno de la superficie y describan los elementos que forman el desarrollo plano de un cono recto.

4. La Figura 10 muestra tres desarrollos planos de un cono. Observen la figura y respondan las preguntas.

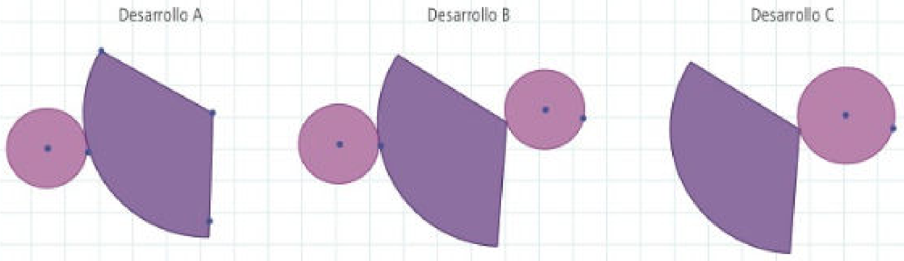


Figura 10

a) ¿Cuál es el correcto desarrollo plano de un cono? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles son los desarrollos planos incorrectos? ¿Por qué?

Después socialicen sus argumentos y confróntenlos con la siguiente información:

Un cono es un sólido de revolución que se puede desarrollar en el plano. El desarrollo de su cara lateral es un sector circular y la base es un círculo. El radio del sector circular es la generatriz del cono y la longitud de su arco es el perímetro de la base: $2\pi r$, donde r es el radio de ésta. Por el teorema de Pitágoras se puede conocer la medida de la generatriz g del cono $g = \sqrt{h^2 + r^2}$, donde h es la altura del cono y r el radio de su base. La medida del ángulo del sector circular se calcula con la fórmula $\alpha = 360(\frac{r}{h})$, donde r es el radio de su base y h es la altura del cono.

Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Después, de manera grupal con la guía de su profesor comenten las ventajas de aplicar el teorema de Pitágoras para conocer la medida de la generatriz del desarrollo de un cono recto cualquiera. Y en caso de dudas discutan entre todos por qué la esfera no tiene un desarrollo plano.

RDT

Visita la página electrónica http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/110919_conos.elp/cuerpos_de_revolucin.html (última consulta: 27 de junio de 2013).
Analiza la información y accede a la sección "Actividades" para evaluar tus conocimientos acerca de los sólidos de revolución.
También puedes visitar la página electrónica http://www.educaplay.com/es/recursoseducativos/808770/partes_de_un_solido.htm y trabajar con el programa interactivo (última consulta: 27 de junio de 2013).

Comparte tus experiencias con las de tus compañeros. En caso de dudas o dificultades, solicita el apoyo de tu profesor.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Los desarrollos planos de la Figura 11 pertenecen a tres conos rectos distintos que comparten la misma altura, 17 cm. Determina la medida de la generatriz y la medida del ángulo del sector circular.

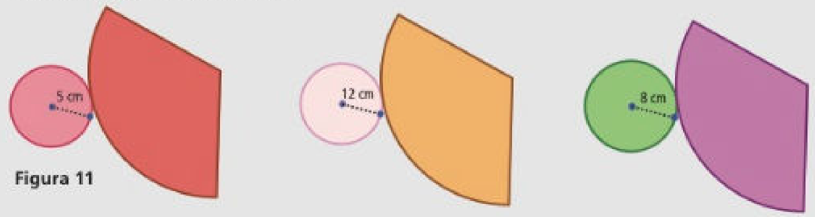


Figura 11

2. Ixchel piensa que un cilindro recto se puede generar apilando muchos círculos de igual radio, como una torre de CDs.
   a) ¿Estás de acuerdo con la idea de Ixchel? Argumenta ampliamente.
   b) ¿Un cilindro se puede generar al trasladar círculos congruentes en un eje perpendicular a la base? Explica.
3. ¿Cuánto mide el radio de un cilindro cuya superficie lateral es de 12 cm de longitud por 14 cm de altura?


Figura 12

En plenaria y con la orientación de su profesor, comenten sus respuestas y discutan las dudas que surjan para darles solución.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			
Mostré respeto y tolerancia en el trabajo en equipo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la generación de los sólidos de revolución.			
Argumentó con sustentos matemáticos en las preguntas y planteamientos.			
Colaboró en la construcción de los desarrollos planos de los cilindros y conos rectos.			
Escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 23
Relaciones entre elementos de una recta

Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Explora

Analiza la siguiente información y contesta lo que se indica.

1. En el plano coordenado de la Figura 1 se han trazado dos rectas asociadas respectivamente a las siguientes ecuaciones: $y = 1.5x + 3$ y $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Analiza las rectas y determina qué ecuación corresponde a cada una, posteriormente contesta lo que se te pregunta.

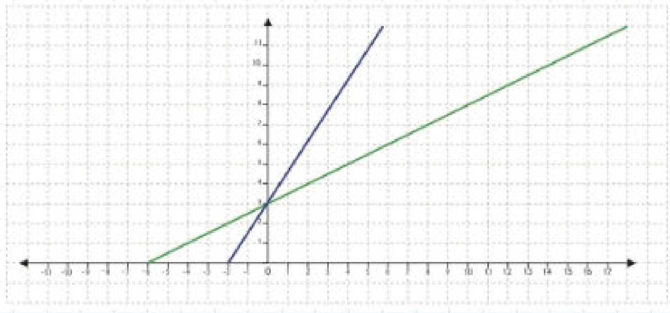


Figura 1

a) Las ecuaciones anteriores son del tipo $y = mx + b$, ¿qué representan m y b en dicha ecuación?
b) Entonces, ¿qué representa el valor de 3 en ambas ecuaciones? ¿y qué representa $\frac{1}{2}$ y 1.5 en cada una?
c) ¿Cuál de las dos rectas tiene mayor **ángulo de inclinación**?
d) ¿La medida de la pendiente de la recta asociada a $y = 1.5x + 3$ es 3 veces menor que la medida de la pendiente de la recta asociada a la ecuación $y = \frac{1}{2}x + 3$? Sustenta tu respuesta.
e) ¿Es cierto que el valor de la pendiente de ambas rectas es de 3, ya que ambas cruzan el eje de las ordenadas en ese punto? ¿Por qué?

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en segundo de secundaria con respecto a los parámetros de las rectas asociadas a las funciones del tipo $y = mx + b$, donde x es un número entero, fraccionario o decimal positivo o negativo, m es la pendiente de la recta y b su ordenada al origen te serán de utilidad para analizar las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

ángulo de inclinación. Es el ángulo que la recta en referencia forma con el eje de las abscisas o la horizontal.

2. Traza en el plano de la Figura 1 la recta asociada a la ecuación $y = 2.5x + 3$ y contesta:

a) ¿En qué punto la recta interseca al eje y?
b) Entonces, ¿su pendiente es 3? Explica tu respuesta.
c) ¿Cuál de las tres rectas tiene menor pendiente?
d) ¿Cuál tiene menor ángulo de inclinación?
e) Si se quiere trazar una recta cuya pendiente sea menor que cualquiera de las tres rectas anteriores, ¿cuál puede ser la ecuación que la represente?

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus explicaciones. Luego entre todos establezcan una conclusión acerca de la relación que existe en la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación.

En construcción

Tómalo en cuenta

El plano cartesiano es una herramienta útil en diversas actividades diarias. Sirve como referencia en un plano cualquiera; por ejemplo, el plano (o el suelo) de una cuidad. Se denomina así por el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), también llamado Renatus Cartesius, considerado el padre de la geometría analítica.

Resuelvan los siguientes problemas:

1. En el plano cartesiano de la Figura 2 tracen la recta asociada a la ecuación $y = 0.2x + 1$ y denoten con A el punto en que la recta interseca al eje de las x.

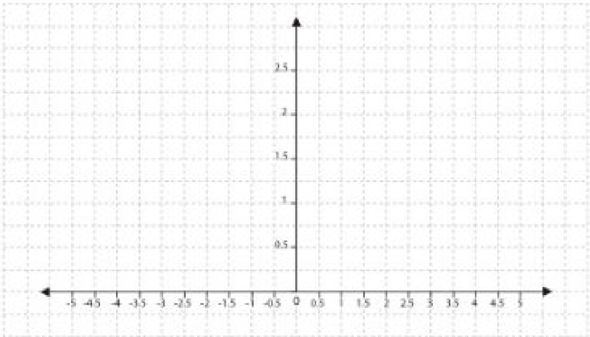


Figura 2

a) Llamen α al ángulo de inclinación de la recta que trazaron y mídanlo.
b) Calculen la pendiente de la recta, anótenla.
c) Tracen una recta paralela al eje y en los siguientes puntos:

B= (4,0)	H=(2.5,0)
E= (3.5, 0)	J =(2,0)
F= (3,0)	L=(1.5,0)

d) Llamen P, Q, R, S, T, U y V a los puntos en que las rectas paralelas intersecan a la recta $y = 0.2x + 1$ respectivamente.
e) Con respecto al ángulo de cada uno de los triángulos que se forman, identifiquen el cateto opuesto (CO), el cateto adyacente (CA) y la hipotenusa y determinen sus medidas.
f) Anoten sus resultados en la Tabla 1 de la siguiente página.

Triángulo	ΔABC	ΔADE	ΔAFG	ΔAHI	ΔAJK	ΔALM
CO (cm)	1	2	2			
CA (cm)						
$\frac{CO}{CA}$						

Tabla 1

g) ¿Los triángulos que se forman son semejantes?
h) ¿Qué caracteriza la relación de semejanza entre dos o más triángulos?
i) ¿Cómo son los cocientes obtenidos de $\frac{CO}{CA}$? ¿Por qué?
j) ¿Qué significado pueden asignarle a los cocientes obtenidos?

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas con la finalidad de comprobar sus resultados. Posteriormente, establezcan una conclusión con respecto a las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta asociada a una ecuación de la forma $y = mx + b$, el valor del ángulo α que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.

Realicen lo que se pide:

2. Analicen en la Figura 3 la recta asociada a la función $y = 1.20x$.

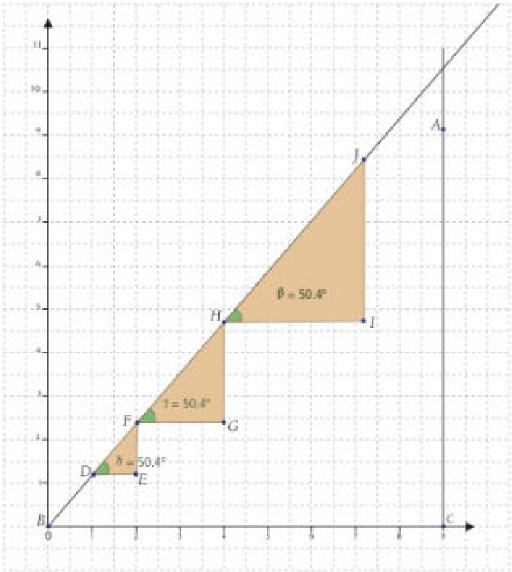


Figura 3

a) ¿Cuál es el valor numérico de la pendiente de la recta?
b) ¿Cuál es la medida del ángulo de inclinación de la recta?
c) ¿Qué relación hay entre los ángulos δ, γ y β? Expliquen detalladamente.
d) Identifiquen el cateto opuesto y el cateto adyacente con respecto al ángulo señalado en cada uno de los triángulos trazados. Completen la Tabla 2 de la siguiente página con la información que se les solicita.

Triángulo	Ángulo (°)	CO (cm)	CA (cm)	Cociente $\frac{CO}{CA}$
ABC	α =			
DEF	δ =			
FGH	γ =			
HIJ	β =			

Tabla 2

e) ¿Cuál es la relación entre el valor de la pendiente de una recta del tipo $y=mx$, el valor del ángulo α, y el cociente $\frac{CO}{CA}$?

3. En su cuaderno grafiquen la recta $y = \frac{3}{4}x$. Posteriormente determinen la medida del ángulo de inclinación de la recta y llámenlo λ. Construyan cuatro triángulos rectángulos con la recta y el eje de las abscisas; y con respecto al ángulo λ obtengan las medidas del cateto opuesto y el cateto adyacente de cada uno de los triángulos.

Escriban una conclusión acerca de la relación que existe entre el valor del ángulo de inclinación λ, la pendiente y el cociente $\frac{CO}{CA}$.

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego discutan lo siguiente:

- En una familia de triángulos rectángulos que se forman entre la recta asociada a una ecuación del tipo $y = ax$ y el eje de las abscisas, ¿cómo son los cocientes de la medida del cateto opuesto sobre la medida del cateto adyacente con respecto a un ángulo específico? Registren sus acuerdos y escriban sus conclusiones.

En la cima

Respondan los siguientes planteamientos:

1. En la Figura 4 se muestran las gráficas de tres rectas asociadas a las ecuaciones $y = 2x + 3$, $y = 2x$ y $y = 2$.

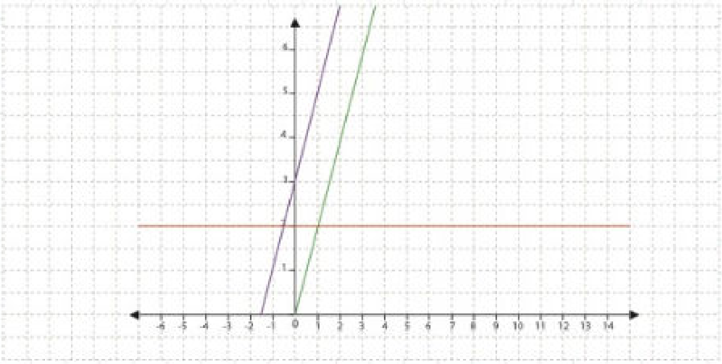


Figura 4

a) Analicen las gráficas y asignen a cada una la ecuación correspondiente.
b) Tracen en la figura el ángulo de inclinación de cada recta e identifíquenlos con las letras griegas α, β o γ según corresponda al orden en que se presentaron las ecuaciones en el enunciado del problema.
c) Con cada una de las rectas y el eje de las abscisas tracen un triángulo rectángulo. Posteriormente, con respecto a los ángulos α, β y γ, según corresponda, formen el cociente $\frac{CO}{CA}$ para cada triángulo trazado.
d) Usen los cocientes del inciso anterior para completar los datos del siguiente registro tabular.

Ecuación	$y = 2x + 3$	$y = 2x$	$y = 2$
Valor de la pendiente	1	2	2
Medida del ángulo de inclinación			
Valor de la pendiente $\frac{CO}{CA}$			
Relación entre la pendiente de la recta, el ángulo dado y el cociente de $\frac{CO}{CA}$			

Tabla 3

2. Analicen la información de la Tabla 3 y contesten:

a) La información que provee la tabla, ¿les permite analizar las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente, para cada tipo de recta?
b) ¿Qué significado pueden asociarle a los datos que se obtuvieron para la recta $y = 2$?
c) Reúnanse con otra pareja de compañeros y discutan sus argumentos con respecto al cuestionamiento del inciso b.

En plenaria socialicen sus conclusiones, comparen las explicaciones y registren sus acuerdos con respecto a las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente, para cada tipo de recta estudiada. Después discutan la siguiente información:

Para las funciones lineales de la forma $y = mx + b$, se tiene que si se trazan una familia de triángulos semejantes a partir de la recta y el eje de las abscisas o una paralela a este eje, el cociente de la medida del cateto opuesto entre el cateto adyacente es constante para todos los triángulos, a dicho cociente se le llama **tangente** y su valor dependerá del ángulo o inclinación de la recta.

RDT

1. Visita la dirección electrónica
   http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_109_g_4_t_2.html?open=activities&from=category_g_4_t_2.html
   (última consulta: 17 de noviembre de 2013)
   En ella se muestra cómo graficar una función del tipo $y = mx + b$.
2. Obtén las gráficas de las ecuaciones $y = 4.5x + 3$, $y = 3x$ y $y = 3$. 3.
3. Después escribe tus conclusiones con respecto a las experiencias y si hay dudas coméntenlas con su profesor para solucionarlas. ■

Destreza y estrategia

Realicen los trazos que sean necesarios para justificar sus respuestas.

1. La Figura 5 muestra la gráfica de cuatro rectas del tipo $y = mx + b$.

a) Se ha trazado una recta paralela al eje de las abscisas y otra al eje de las ordenadas, ¿cuántos y cuáles triángulos se forman?

b) ¿Los triángulos que se forman con las rectas antes descritas son semejantes entre sí?

c) ¿Los ángulos de inclinación de las rectas son iguales entre sí?

d) Identifiquen los ángulos de inclinación de cada recta y determinen su medida.

e) Completen la Tabla 4 con la información que se les pide.

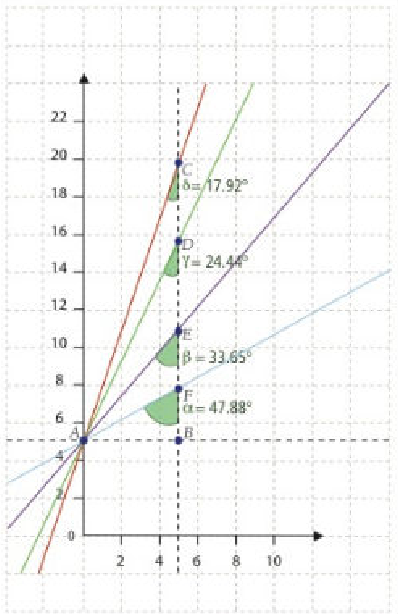


Figura 5

Recta	Pendiente	Ángulo de inclinación de la recta (°)	Tangente del ángulo de inclinación
AC		BAC =	
AD		BAD =	
AE		BAE =	
AF		BAF =	

Tabla 4

f) Verifiquen en la Tabla 4 que la pendiente y la tangente del ángulo de inclinación correspondiente a cada recta son iguales y expliquen por qué.

2. Para cada una de las siguientes rectas determinen la tangente de su ángulo de inclinación. ¿En cuál recta el valor de la tangente es mayor?

a) $y = 7.25x + 2$
b) $y = 0.6$
c) $y = 1.2x$
d) $y = 12.3$

En plenaria y con la orientación de su profesor, validen sus respuestas de manera que sean correctas. Posteriormente discutan sobre las condiciones necesarias para que en una familia de triángulos rectángulos la tangente de uno de sus ángulos sea la misma.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé activamente en las discusiones grupales.			
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Contribuí con ideas e información.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó el valor de la pendiente en una ecuación de la forma $y = mx + b$.			
A partir de la gráfica de una recta identificó a la pendiente como la razón de los catetos de los triángulos rectángulos construidos con la recta y el eje de las abscisas.			
Colaboró en el análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.			
Durante las reflexiones grupales, escuchó con atención y respeto la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 24
Razones trigonométricas

Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo.

Nexos

En la lección anterior analizaste las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que la recta forma con el eje de las abscisas y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente del triángulo rectángulo que la recta forma con ese mismo eje. Los conocimientos que adquiriste en esa lección te serán de utilidad para realizar el análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. ■

Explor@

Analiza la siguiente información y contesta lo que se indica.

1. Se han trazado dos rectas paralelas al lado CB del triángulo rectángulo ABC de la Figura 1. Analízalo y contesta:

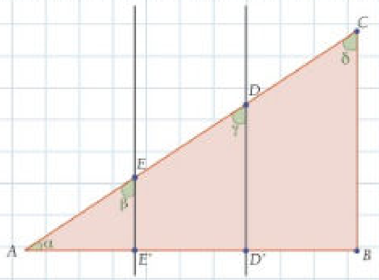


Figura 1

a) ¿Por qué el ΔABC es un triángulo rectángulo?
b) Escribe el nombre de cada uno de sus lados y sus ángulos.
c) ¿Cuántos triángulos se forman al trazar las paralelas?
d) ¿Qué tipo de triángulos son? ¿Por qué?
e) Con respecto al ángulo α identifica, para cada triángulo, el cateto opuesto (CO), el cateto adyacente (CA) y la hipotenusa (H), mídelos y registra tus resultados en la Tabla 1.

Triángulo	CO (cm)	CA (cm)	H (cm)
ABC			
AEE'			
ADD'			

Tabla 1

f) ¿Cuál es la medida del ángulo α en cada triángulo formado?
g) ¿Cuál es la medida de los ángulos β, γ, δ?
h) ¿Cómo son los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC con respecto a los ángulos agudos de los triángulos que se forman?
i) Entonces, ¿qué relación se pueden establecer entre los tres triángulos rectángulos de la Figura 1?

Reúnete con dos de tus compañeros e intercambien sus argumentos. Luego discutan acerca de las condiciones que debe cumplir un triángulo para ser considerado un triángulo rectángulo.

En construcción

Realicen lo que se solicita.

1. De la Figura 1, midan con respecto al ángulo α, la longitud del cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa de ΔABC, $\Delta AEE'$ y $\Delta ADD'$. Registren sus resultados en la Tabla 2.

	ΔABC	$\Delta AEE'$	$\Delta ADD'$
CO (cm)			
CA (cm)			
H (cm)			
$\frac{CO}{H}$			
$\frac{CA}{H}$			

Tabla 2

a) Calculen los cocientes que se indican en las dos últimas filas.
b) ¿Cómo son entre sí los resultados de los cocientes $\frac{CO}{H}$?
c) Reflexionen acerca de su respuesta anterior y argumenten por qué sucede eso.
d) ¿Cómo son entre sí los resultados de los cocientes $\frac{CA}{H}$? ¿Por qué?

2. Sigan trabajando con la Figura 1 y tracen una recta paralela (l_1) al lado AB del ΔABC en un punto F. Después tracen otra recta paralela (l_2) al mismo lado AB, pero que pase por un punto G. Nombren a los puntos de intersección entre las rectas l_1 y l_2 y el lado CB, como B_1 y B_2, respectivamente. Analicen su construcción y contesten:

a) ¿Cuántos triángulos rectángulos se forman al trazar las rectas paralelas l_1 y l_2?
b) Llamen α' y α" a los ángulos B_1AF y B_2AG respectivamente. ¿Cómo son los ángulos α, α' y α"?
c) Ubiquen el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa en ΔABC, ΔAFB_1 y ΔAGB_2 con respecto a los ángulos α, α' y α". Usen sus instrumentos de medición para registrar los datos solicitados en la Tabla 3.

Triángulo	Medida del cateto opuesto	Medida del cateto adyacente	Medida de la hipotenusa	Cociente $\frac{CO}{H}$	Cociente $\frac{CA}{H}$
ABC					
AEE'					
ADD'					

Tabla 3

d) ¿Qué nombre reciben los cocientes de la columna verde?
e) ¿Por qué los cocientes obtenidos en la columna de color verde son iguales?
f) ¿Qué nombre reciben los cocientes de la columna azul?
g) ¿Por qué los cocientes obtenidos en la columna de color azul son iguales?

h) Reflexionen acerca de sus respuestas de las actividades 1 y 2 y escriban una conclusión con respecto a las relaciones identificadas entre los cocientes $\frac{CO}{H}$ y $\frac{CA}{H}$ de un triángulo rectángulo o de una familia de triángulos rectángulos semejantes, con base en un ángulo dado.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas con la finalidad de obtener una conclusión grupal.

Para todo triángulo rectángulo se pueden establecer tres razones trigonométricas, con respecto a un ángulo α determinado:
Seno α (sen α): es la razón $\frac{CO}{H}$ donde CO es la medida del cateto opuesto al ángulo α, y H es la medida de la hipotenusa.
Coseno α (cos α): se obtiene de la razón $\frac{CA}{H}$, donde CA es la medida del cateto adyacente al ángulo α, y H es la medida de la hipotenusa.
Tangente α (tan α): se obtiene de la razón $\frac{CO}{CA}$, donde CO es la medida del cateto opuesto al ángulo α, y CA es la medida del cateto adyacente al ángulo α.

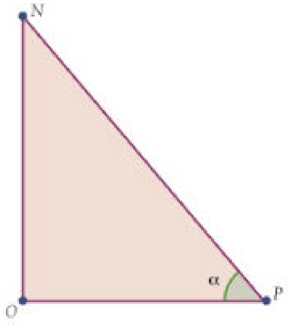


Figura 2

Realicen la siguiente actividad.

3. En la Figura 3 se muestra la gráfica de la recta asociada a la ecuación $y = \frac{1}{2}x + 2$ y la gráfica de tres rectas paralelas al eje de las ordenadas. Si se toma en cuenta el triángulo rectángulo que la recta forma con el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas, se observa que al trazar las tres rectas paralelas se forman cuatro triángulos rectángulos que comparten el ángulo α en común. Identifiquen con respecto al ángulo α el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa de los triángulos que se forman. Después completen los datos de la Tabla 4 y contesten lo que se les pregunta.

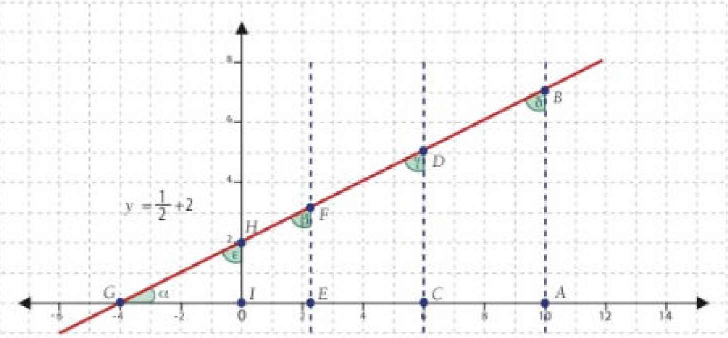


Figura 3

Triángulo	Medida del ángulo α	Razón seno $\frac{CO}{H}$	Razón coseno $\frac{CA}{H}$	Razón tangente $\frac{CO}{CA}$
GHI				
GFE				
GDH				
GAB				

Tabla 4

a) ¿Cómo son entre sí los resultados de los cocientes en los cuatro triángulos?
b) ¿Por qué sucede eso?
c) Con una calculadora científica, obtengan el valor de sen^{-1} y el cos^{-1} de cada uno de los resultados obtenidos de la razón seno y la razón coseno. Anoten sus resultados en la columna correspondiente de la Tabla 5.

sen^{-1} $\frac{CO}{H}$	cos^{-1} $\frac{CA}{H}$

Tabla 5

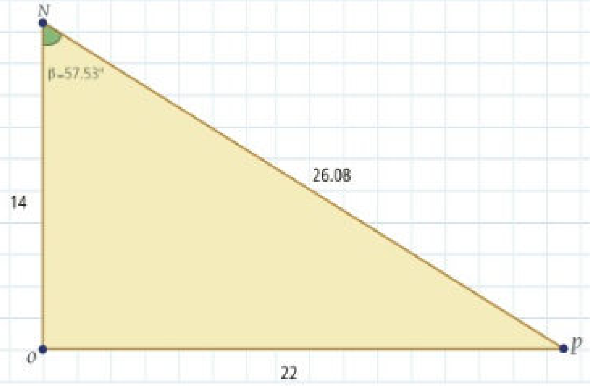
d) ¿Los resultados coinciden con la medida del ángulo α? ¿Por qué?
e) Si en el ΔGHI, de la Figura 2, se considera el ángulo ε en lugar del ángulo α para calcular los cocientes, ¿se obtienen los mismos resultados?, ¿por qué?
f) ¿Cuál es la medida del ángulo ε?

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego discutan sobre los cocientes obtenidos de una familia de triángulos rectángulos que se forman a partir de una recta del tipo $y = mx + b$ y el eje de las abscisas, con respecto a un ángulo dado. Registren sus acuerdos y escriban sus conclusiones.

En la cima

Respondan los siguientes planteamientos:

1. Con respecto a los ángulos α y β del ΔONP, de la Figura 4, determinen las razones trigonométricas que se les indican abajo. Luego, con base en ellas contesten lo que se les pregunta:



sen(α) = sen(β) =

cos(α) = cos(β) =

tan(α) = tan(β) =

Figura 4

a) ¿Cuánto suman el ángulo α y el ángulo β?
b) ¿Qué nombre reciben esos ángulos?
c) ¿Qué relación existe entre el seno de α y el coseno de β? Expliquen.
d) ¿Qué relación existe entre la tangente de α y la tangente de β? Argumenten.
e) ¿Qué conclusión pueden establecer entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios?
f) Si el seno de un ángulo de 40° es igual a 0.6427, ¿a qué es igual el coseno de un ángulo de 50°?
g) ¿Cuál es el producto de la tangente del ángulo α por la tangente del ángulo β del ΔONP?

En plenaria y con la orientación de su profesor, validen sus respuestas de manera que sean correctas y discutan acerca de la relación que existe entre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

RDT

1. Explora tu calculadora científica e identifica las teclas asociadas a las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo.

2. Mide los lados y ángulos de los triángulos formados en la Figura 5.

3. Con respecto al ángulo indicado en cada triángulo, completa la Tabla 6.

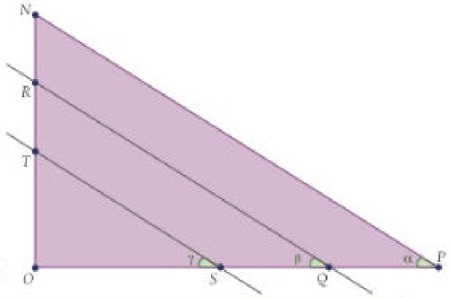


Figura 5

Triángulo	NOP	ORQ	OTS
Cociente $\frac{CO}{H}$			
Cociente $\frac{CA}{H}$			
Cociente $\frac{CO}{CA}$			
Tecla SIN y medida del ángulo indicado en cada caso.			
Tecla COS y medida del ángulo indicado en cada caso.			
Tecla TAN y medida del ángulo indicado en cada caso.			

Tabla 6

4. Explica cómo se puede obtener en la calculadora científica el valor del ángulo α, β, y γ y viceversa; conociendo el valor del ángulo cómo se puede obtener el valor de cada una de las razones trigonométricas.

Comparte tus resultados y respuestas con otros compañeros. En caso de dudas en el uso de la calculadora para obetener las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo acudan a su profesor.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. El ΔJKL de la Figura 6 es un triángulo obtusángulo y $\overline{KM}$ es su altura. Con tus instrumentos geométricos obtén las medidas necesarias para realizar lo que se te pide en los siguientes incisos.

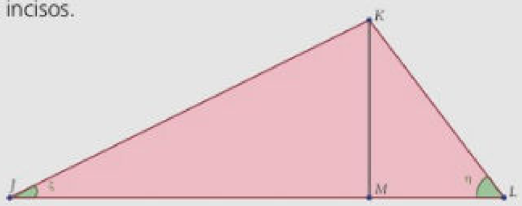


Figura 6

a) Con respecto al ángulo ζ del ΔJKM calcula la razón seno, la razón coseno y la razón tangente y anótalas en tu cuaderno.
b) Y con respecto al ángulo η del ΔKML calcula las razones trigonométricas correspondientes y escríbelas en tu cuaderno.
c) ¿Cómo son entre sí los valores de la razón seno en los incisos a y b? ¿Por qué?
d) ¿Cómo son entre sí los valores de la razones trigonométricas para cada triángulo? ¿Por qué?

2. En la Figura 7 $a = 6$ y $c = 10$. Determina las medidas de los ángulos A y B, la medida del lado b y el área del triángulo.

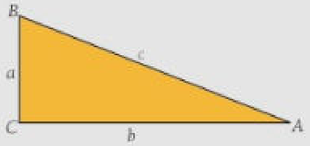


Figura 7

En plenaria y con la orientación de su profesor, validen sus respuestas de manera que sean correctas. Si hay dudas coméntenlas con la intención de solucionarlas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Realicé mis tareas responsablemente.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó la constante de dividir el cateto opuesto o adyacente entre la hipotenusa en triángulos rectángulos semejantes y lo relacionó con la medida del ángulo agudo de referencia.			
Analizó las relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 25
Problemas trigonométricos

Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Explor@

Analiza los siguientes planteamientos.

1. El triángulo *ABC* de la Figura 1 es un triángulo rectángulo a partir del cual se pueden definir las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo α y del ángulo β. De acuerdo a tus conocimientos sobre este tema contesa:

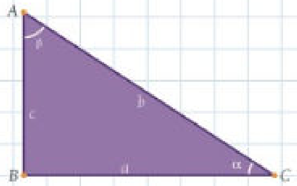


Figura 1

a) ¿Cuáles son las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo α?

sen (α) = cos (α) = tan (α) =

b) ¿Cuáles son las tres opciones que relacionan de manera correcta las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo β? Subráyalas.

- sen (β) = $\frac{b}{a}$, cos (β) = $\frac{b}{c}$, y tan (β) = $\frac{a}{b}$
- sen (β) = $\frac{a}{c}$, cos (β) = $\frac{c}{a}$, y tan (β) = $\frac{b}{c}$
- sen (β) = $\frac{a}{b}$, cos (β) = $\frac{c}{a}$, y tan (β) = $\frac{a}{c}$

2. Determina las razones trigonométricas seno, coseno y tangente con respecto a los ángulos α y β, del triángulo *ABC* de la Figura 2 de la siguiente página.

sen (α) = sen (β) =

cos (α) = cos (β) =

tan (α) = tan (β) =

Nexos

En la lección 23 analizaste las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que la recta forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. En la lección 24 ampliaste tu análisis con las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. Estos contenidos te serán de utilidad para resolver problemas geométricos a partir de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un triángulo rectángulo.

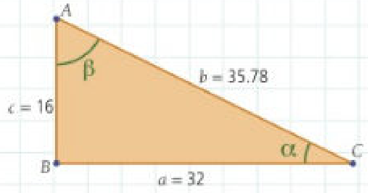


Figura 2

3. El seno de un ángulo de 45° es igual a 0.7071, ¿a qué es igual el coseno de ese mismo ángulo?

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus respuestas. Luego, con la ayuda de sus calculadoras verifiquen que los resultados del problema 2 sean correctos. Posteriormente, comenten acerca de lo que tomaron en cuenta para establecer las razones trigonométricas con respecto a un ángulo específico.

Tómalo en cuenta

Los babilonios y egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas. Posteriormente, el griego, Hiparco de Nicea, contribuyó a la Trigonometría con sus tablas de "cuerdas", precursoras de las tablas de funciones trigonométricas actuales.

En construcción

Realicen lo que se solicita.

1. Observen el triángulo rectángulo *ABC* de la Figura 3 y contesten.

a) ¿Cuál es la longitud del lado *b* y el valor del ángulo β?
b) A partir de los datos anteriores, ¿qué razón trigonométrica puede ayudarles a determinar la longitud del cateto opuesto al ángulo β? ¿Y cuál pueden utilizar para calcular el valor de la hipotenusa?
c) ¿Cómo emplearían las razones trigonométricas que eligieron para calcular la medida del cateto opuesto al ángulo β y la medida de la hipotenusa?
d) ¿Para calcular la longitud del cateto opuesto al ángulo β y la longitud de la hipotenusa pueden emplear el teorema de Pitágoras? Justifiquen.
e) Apliquen lo que consideren conveniente y obtengan el valor de *x* y de *y*.

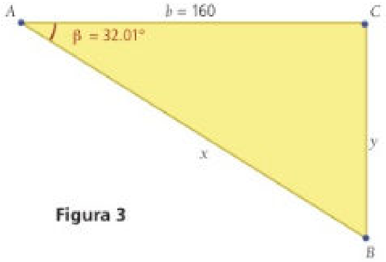


Figura 3

2. Miguel, un alumno de tercero de secundaria, resolvió en su clase de matemáticas el problema anterior, y con respecto al inciso c de ese problema afirma que primero se debe determinar el valor de *x*, y después el valor de *y*.

Para obtener el valor de *x* escribió en su cuaderno el razonamiento de la página siguiente:

Debido a que tengo dos valores conocidos, el ángulo β y el cateto adyacente al ángulo β, entonces puedo usar la razón coseno:

$$\operatorname{Cos}(32.01) = \frac{160}{x}$$

Multiplico ambos lados de la igualdad por x

$$x\,(\operatorname{Cos}(32.01)) = \frac{(160)\,\cancel{x}}{\cancel{x}}$$

y obtengo:

$$x\,(\operatorname{Cos}(32.01)) = 160$$

Después divido ambos lados de la igualdad entre Cos(32.01):

$$\frac{x(\operatorname{Cos}(32.01))}{\operatorname{Cos}(32.01)} = \frac{160}{\operatorname{Cos}(32.01)}$$

Reduzco términos y obtengo: $x = \dfrac{160}{\operatorname{Cos}(32.01)}$, entonces: $x = 190.47$

a) ¿Obtuvieron el mismo resultado que Miguel?
b) ¿Qué opinan del razonamiento que siguió Miguel para calcular el valor de la hipotenusa del triángulo *ABC*?
c) Comparen el razonamiento que ustedes siguieron para calcular el valor de la hipotenusa con el descrito por Miguel, ¿son semejantes? En caso de haber contestado afirmativamente indiquen en qué son semejantes. Y en caso de que hayan contestado negativamente, ¿en qué son diferentes?
d) ¿El problema se puede resolver empleando otra razón trigonométrica?
e) En caso de haber contestado afirmativamente la pregunta anterior, calculen el valor de x utilizando la razón trigonométrica que consideran les puede ser de utilidad para ello.

3. Para resolver el problema 1, Jazmín, la compañera de equipo de Miguel, propuso aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el valor de y. Después de reflexionar acerca de la idea de Jazmín, en equipo escribieron el siguiente razonamiento:

Conocemos el valor del cateto mayor y de la hipotenusa, entonces:

$$(190.47)^2 = (160)^2 + y^2$$

Es necesario despejar a y^2, por lo que es necesario que restemos a ambos lados de la igualdad 160^2

$$(190.47)^2 - (160)^2 = \cancel{(160)^2} - \cancel{(160)^2} + y^2$$

Luego, obtenemos los cuadrados de los números del lado izquierdo de la igualdad y restamos:

$$36278 - 25600 = y^2$$

$$10678 = y^2$$

Sacamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad $\sqrt{10678} = \sqrt{y^2}$

Finalmente obtenemos que $y = 103.3$

a) ¿Obtuvieron el mismo resultado para y, que el que obtuvieron ellos?
b) ¿Qué piensan del razonamiento establecido por Jazmín y Miguel?
c) Comparen el razonamiento que ustedes siguieron con el que siguieron ellos y contesten: ¿Son semejantes? En caso de haber contestado afirmativamente respondan: ¿en qué son semejantes? Y en caso de que hayan contestado negativamente discutan en qué son diferentes.
d) ¿El problema se puede resolver usando otra razón trigonométrica?
e) En caso de haber contestado afirmativamente la pregunta anterior, calculen el valor de y utilizando la razón trigonométrica que consideran les puede ser de utilidad para ello.
f) Escriban una conclusión con respecto de cómo las razones trigonométricas son de utilidad para resolver problemas geométricos.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas y razonamientos. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas. Posteriormente, de manera grupal respondan lo siguiente:

- ¿Fue de utilidad apoyarse en el teorema de Pitágoras para determinar el valor de y?

Registren sus acuerdos y escriban sus conclusiones en su cuaderno.

Resuelvan los siguientes problemas.

4. Analicen la Figura 4 y respondan.

a) ¿Qué razón trigonométrica pueden utilizar para determinar el valor de x?
b) ¿Y para determinar el valor de y?
c) ¿Qué incógnita deben calcular primero? Expliquen por qué.
d) Calculen el valor de x y el valor de y y anótenlos en la Figura 4.

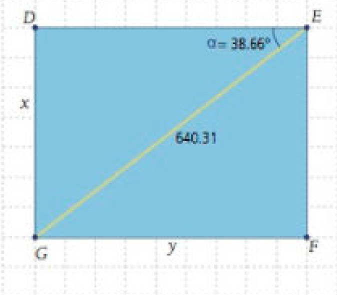


Figura 4

5. Mediante su calculadora, obtengan los valores de las razones trigonométricas de los ángulos que se indican en la Tabla 1. Posteriormente contesten las preguntas que se plantean.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
0°			
30°			
60°			
90°			
120°			
150°			
180°			
210°			
240°			
270°			
300°			
330°			
360°			

Tabla 1

a) Con respecto a cada una de las razones trigonométricas, ¿existe alguna regularidad entre los valores registrados?
b) ¿Cuáles son los valores del seno de un ángulo de 0° y 360°?
c) ¿Qué significado pueden asociarle al resultado anterior?
d) ¿Qué valores se repiten en la columna de coseno?
e) ¿Para qué medida de ángulos la tangente tiene valores negativos?

En plenaria y con la orientación de su profesor, validen sus respuestas de manera que sean correctas y redacten sus conclusiones finales acerca del uso de las razones trigonométricas en la resolución de problemas geométricos. Si hay dudas coméntenlas con la intención de solucionarlas.

En la cima

Respondan los siguientes planteamientos:

1. Un bombero realiza sus cursos de actualización, en una simulación de un rescate debe subir por una escalera para ayudar al sujeto en riesgo y bajar en el menor tiempo posible.

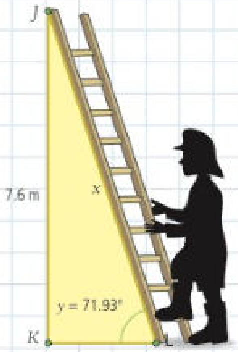


Figura 5

La Figura 5 ilustra la situación en que se encuentra el bombero, analicen la figura y contesten:

a) ¿Qué distancia (x) escalará el bombero para rescatar al sujeto?
b) Si el bombero se desplaza a una velocidad constante de 6 m/s, ¿en cuánto tiempo realiza la simulación?

2. Don José es el encargado de dar mantenimiento a los anuncios espectaculares sobre la equidad de género. El día de hoy debe retocar el que se muestra en la Figura 6.

Relaciónalo con...

Equidad de género. Es importante apoyar acciones que promuevan y fomenten que cada miembro de la sociedad respete a los demás y participe de modo que desempeñe un papel que le permita aprovechar su potencial al máximo.

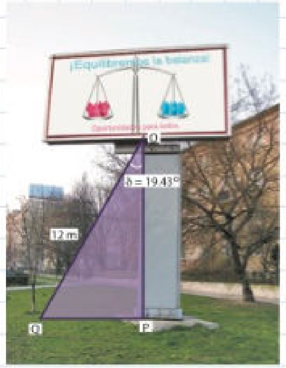


Figura 6

De acuerdo con los datos de la figura contesten:

a) ¿A qué altura asciende el señor José para retocar el espectacular?
b) ¿Qué razón trigonométrica emplearon para conocer la medida de la altura a la cual ha sido colocado el espectacular?

3. En la Figura 7 se muestra una antena de repetición, la cual se fija mediante varios cables de acero.

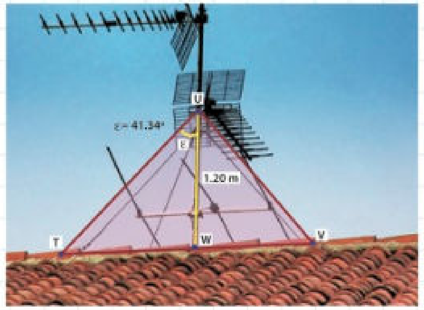


Figura 7

a) ¿Cuál es la distancia de la base de la antena (punto W) a cada uno de los extremos de los cables (puntos T y V)?

En plenaria, comparen respuestas. Expliquen los procedimientos empleados para resolver cada problema. Pidan el apoyo de su profesor, en caso de dudas.

RDT

1. Visita las siguientes direcciones electrónicas y lee atentamente la información que te proporcionan.
http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/relfunda.htm
http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/index.htm
http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/raztrigcualquier.htm
(última consulta: 27 de junio de 2013).
2. ¿Cuál fue el rasgo más importante de la matemática árabe?
3. ¿Por qué se puede afirmar que la trigonometría sirve para "volar"?
4. Explica cómo se puede construir un túnel aplicando lo que sabes de trigonometría.
5. Delante de cada oración escribe si es verdadera o falsa:
   - El seno y el coseno de un ángulo es siempre menor o igual que 1, ya que el cateto es siempre menor que la hipotenusa.
   - La tangente puede tomar cualquier valor, desde cero a infinito (casos extremos), ya que uno de los catetos puede ser muy pequeño y el otro muy grande.
   - El seno, coseno y la tangente de los ángulos se obtenían antiguamente empleando unas tablas que se llaman trigonométricas, actualmente puedes conocer su valor directamente de tu calculadora.

Compara tus respuestas y experiencias con los compañeros. En caso de dudas acude a tu profesor para resolverlas.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un carpintero está construyendo una ventana. Determina los valores de x y y para cada triángulo trazado sobre la Figura 8.

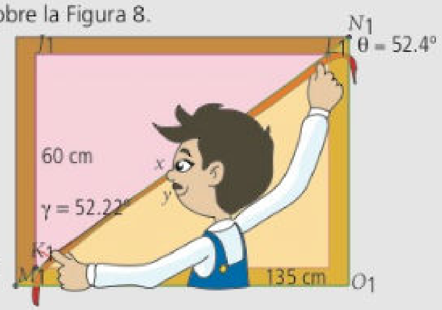


Figura 8

2. Determina la distancia que hay entre el faro y cada una de las embarcaciones que se observan en la Figura 9.

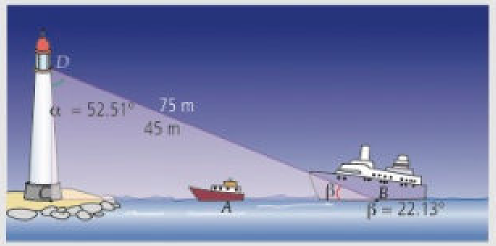


Figura 9

En plenaria y con la orientación de su profesor comparen sus respuestas y en caso de dudas consúltenlas con su profesor.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Aporté ideas e información en las actividades.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Utilizó las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para resolver problemas geométricos.			
Utilizó el teorema de Pitágoras para resolver problemas geométricos que se pueden resolver utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 26
Razón de cambio

Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. La gráfica de la Figura 1 describe la distancia que recorre un auto durante un viaje de 7 horas, cuando el auto se desplaza a velocidad constante:

Tiempo (h)	Distancia (km)
0	0
1	120
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Tabla 1

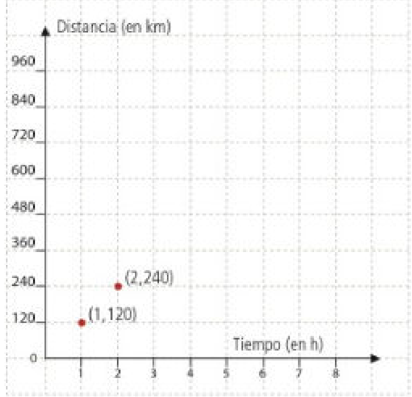


Figura 1

a) Completa la Tabla 1 y la gráfica de la Figura 1.
b) ¿Cuánto tiempo necesita el automóvil para recorrer 600 km?
c) ¿Qué distancia ha recorrido el auto a las 2.5 h de viaje?
d) Analiza en la tabla de datos o en la gráfica cómo cambia la distancia con respecto al tiempo. ¿La distancia varía proporcionalmente con el tiempo? ¿Por qué?
e) ¿Qué características de la gráfica indican que la velocidad del auto se mantuvo constante durante el recorrido?
f) Encuentra la expresión algebraica que describe el movimiento del auto.

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Expliquen cómo fue que completaron la tabla y cómo a partir de la información de la tabla y la gráfica obtuvieron información adicional. Luego, en forma grupal discutan lo siguiente:

Nexos

En grados anteriores has representado algebraica y gráficamente relaciones lineales de la forma $y = kx$ y $y = mx+b$. Además, has analizado en el plano cartesiano las características de cada una al variar los parámetros k, m y b. Estos conocimientos serán de mucha utilidad para la resolución de los problemas de esta lección.

- ¿Qué resulta al dividir la distancia entre el tiempo?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las distintas distancias y los distintos tiempos?
- Si se conoce como **razón de cambio** a la medida en que una variable cambia con respecto a otra, ¿cuál es la razón de cambio a la que se desplaza el automóvil con respecto al tiempo (rapidez)?

En construcción

Realicen lo que se pide en cada caso:

1. En una tienda de computadoras el precio de una computadora portátil en forma de tablilla conocida como *tablet* ha incrementado cada mes en el presente año. La gráfica de la Figura 2 muestra los diferentes aumentos mensuales que ha sufrido el precio de la *tablet*.
   a) ¿Cuánto varió el precio del primer al tercer mes?

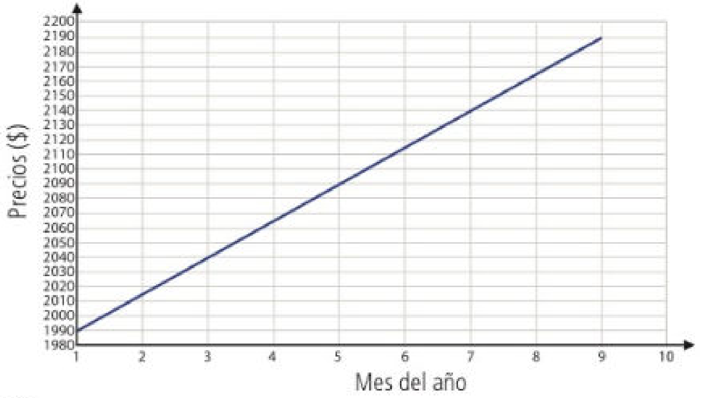


Figura 2

   b) ¿Cuánto varió el precio del primer al cuarto mes?
   c) Suponiendo que el incremento fue el mismo cada mes, ¿cuánto varió el precio del tercer al sexto mes?
   d) ¿Cuál es el incremento mensual del precio del artículo?
   e) Si el primer mes corresponde a enero, ¿cuál es el precio del artículo en marzo?
   f) Si el incremento fue el mismo cada mes, ¿cuál será el precio del artículo en diciembre?
   g) Respecto al inciso a, encuentren el cociente del incremento en el precio entre el número de meses, es decir la razón de cambio. Encuentren la razón de cambio en los incisos b y c y compárenla con la del inciso a. ¿Cómo son?
   h) ¿Qué relación tienen las razones de cambio que encontraron en el inciso g y la respuesta del inciso d?

2. En un laboratorio de pruebas se hizo un análisis sobre el rendimiento de tres automóviles (A, B, C), es decir, la distancia que puede recorrer un automóvil por cada litro de gasolina. Los resultados se muestran en la gráfica de la Figura 3.

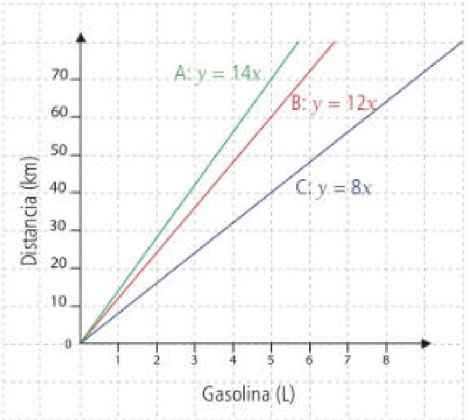


Figura 3

   a) ¿Qué automóvil tiene mejor rendimiento? ______
   b) ¿Qué automóvil presenta el rendimiento más bajo? ______
   c) ¿Cuál es el rendimiento del automóvil A? ______
   d) ¿Cuál es el rendimiento del automóvil C? ______
   e) ¿Cuál es la razón de cambio o rendimiento del automóvil B? ______
   f) Analicen las gráficas, ¿a mayor razón de cambio, mayor es la inclinación de la recta?
   g) ¿Cómo se relaciona la razón de cambio con la pendiente de la recta? Expliquen.

3. En el laboratorio de Física, Laura y Leticia realizaron una práctica que consistía en colgar de dos resortes A y B distintos pesos y medir la elongación correspondiente a cada peso. Algunos de los resultados que obtuvieron se registraron en la Tabla 2 y a partir de ellos se construyó la gráfica de la Figura 4.

Peso en kg	0	1	2	3	4	5
Longitud de resorte A (cm)	20	24	28	32	36	40
Longitud de resorte B (cm)	20	25	30	35	40	45

Tabla 2

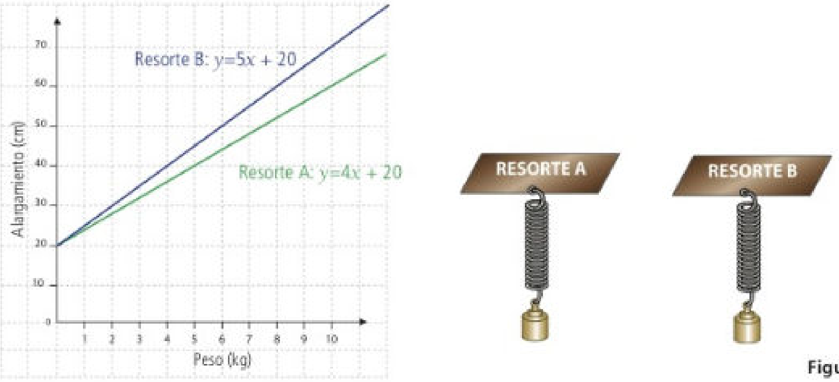


Figura 4

a) ¿Cuál es la razón de cambio del resorte A?
b) ¿Cuál es la razón de cambio del resorte B?
c) ¿Cuál de los dos resortes tiene mayor elongación con un peso de 10 kg?
d) ¿Cuál es el resorte que tiene mayor resistencia de elongación?
e) ¿Cuál es la pendiente de la recta que representa la elongación del resorte A con respecto al peso?
f) ¿Cuánto vale la pendiente de la recta que representa la elongación del resorte B?
g) Comparen las pendientes de cada recta y las razones de cambio respectivas, ¿qué pueden concluir?
h) ¿Se puede concluir que a mayor razón de cambio en la elongación, la pendiente de la recta es mayor? Justifiquen.

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si tienen dudas, pídanle ayuda a su profesor y en plenaria coméntenlas para llegar a un consenso sobre las respuestas correctas. Comenten entre ustedes ejemplos de situaciones en las cuales al variar una variable otra variable también sufre cambios. Discutan acerca de por qué en esas situaciones sería importante calcular la razón de cambio.

Resuelvan el siguiente problema.

4. Una compañía de telefonía celular cobra sus tarifas mensuales en dos modalidades: por minuto y en plan prepago. La relación de las dos tarifas se muestra en la gráfica de la Figura 5.

Relaciónalo con...

Educación financiera y del consumidor. Antes de adquirir un bien o servicio es importante comparar y analizar precios y calidad, de manera que se realice la mejor inversión a corto y largo plazo.

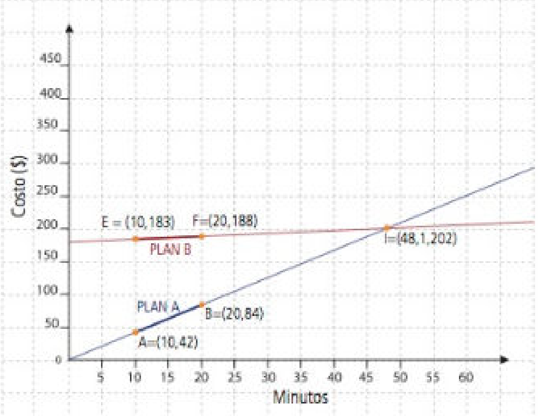


Figura 5

De acuerdo con la información que se presenta en la gráfica, respondan lo siguiente:

a) ¿Qué plan es de prepago?
b) ¿Qué plan es el que conviene si se hacen llamadas menores de 48 minutos?
c) ¿Cuánto varía el costo del minuto 10 al minuto 20 en el plan A?
d) ¿Cuánto varía el costo del minuto 10 al minuto 20 en el plan B?
e) Si en el plan prepago la cuota inicial es de $178.00, ¿cuánto se paga por 10 minutos?
f) ¿Cuánto se paga por 50 minutos en el plan A?
g) ¿Cuál es el cociente del incremento en el costo entre el número de minutos, es decir, la razón de cambio en cada plan?
h) ¿En qué plan el costo por minuto es mayor?

i) Determina la pendiente de cada recta y compárala con la razón de cambio respectiva. ¿Cómo son entre sí?

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas, así como de los procedimientos o cálculos que hayan realizado y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Luego, entre todos discutan qué relación se puede establecer entre la razón de cambio y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.

En la cima

Resuelvan los siguiente problemas:

1. Las Tablas 3, 4 y 5 muestran la relación entre el tiempo y el costo por minuto de tres compañías telefónicas que ofrecen servicio para llamadas de larga distancia a Estados Unidos de América.

Compañía A	
Costo ($)	Tiempo (Min)
9.14	2
18.28	4
	6
	10
	20
	30

Tabla 1

Compañía B	
Costo ($)	Tiempo (Min)
9.60	3
12.80	4
	5
	10
48.00	
64.00	

Tabla 2

Compañía C	
Costo ($)	Tiempo (Min)
15.20	4
	5
	10
76.00	
	30
190.00	

Tabla 3

a) ¿Cuál es la razón de cambio en cada compañía?
b) De acuerdo con la razón de cambio, asocia a cada gráfica de la Figura 6, la compañía telefónica que le corresponde y escribe la expresión algebraica que relaciona el tiempo y el costo.

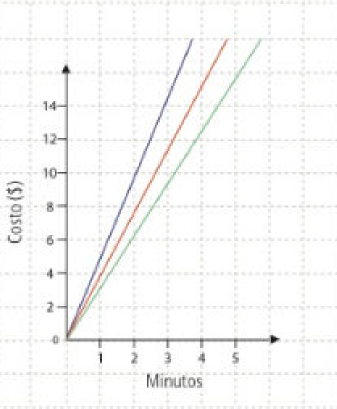


Figura 6

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Luego, discutan sobre si la razón de cambio en la compañía A fuera la misma que en la compañía B, ¿cómo serían las rectas que representan a las compañías? ¿Cómo serían sus pendientes?

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. La gráfica de la Figura 7 muestra el costo del servicio de telefonía celular de dos compañías, con base en la información que proporciona, responde lo que se pide.

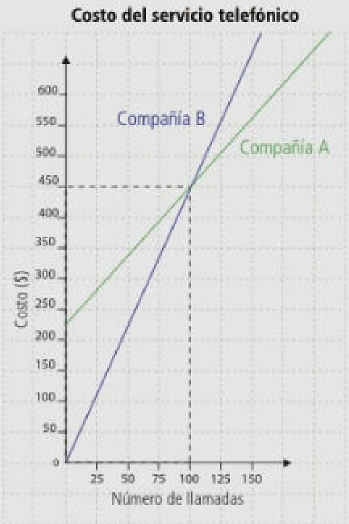


Figura 7

a) ¿Cuál es la razón de cambio en cada compañía?
b) ¿Por qué el costo de las 100 primeras llamadas de celular es el mismo en las dos compañías?
c) ¿Cuál es el incremento en el costo de 50 a 100 llamadas en la Compañía A? ¿Y en la B?
d) En la Compañía A, ¿el incremento en el costo de 1 a 50 llamadas es el mismo que de 51 a 100 llamadas? ¿Y en la B?

2. La gráfica de la Figura 8 muestra el consumo de combustible de un automóvil en función de la distancia recorrida a velocidad constante.

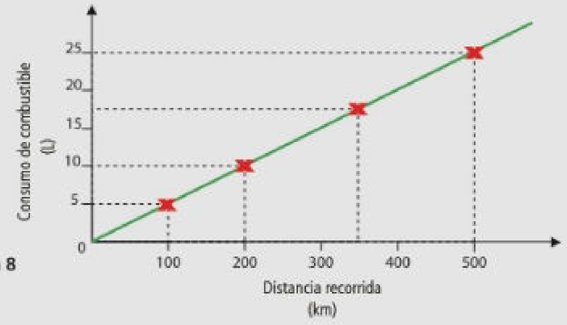


Figura 8

Litros de combustible (y)	Distancia (x)
5	100
10	200
	350
	500
	1000
60	

Tabla 4

a) Completa la Tabla 4 y determina cuál es la razón de cambio en el consumo de combustible del automóvil.
b) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular el número de litros en función de la distancia?

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las repuestas a las que llegaron.

RDT

Visita la página electrónica http://facultad.bayamon.inter.edu/ntoro/pendiente%20de%20una%20recta.htm (última consulta: 27 de junio de 2013).

Analiza la información que ahí se da y realiza un resumen de ella. Luego, expón tu trabajo ante tu grupo.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto la intervención de mis compañeros.			
Participé activamente en las discusiones.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó la razón de cambio como el cociente que mide el cambio de una variable con respecto a otra.			
Identificó la relación entre razón de cambio y la pendiente de la recta a la que representa.			
Participó en la comparación de respuestas y en la discusión grupal de los planteamientos de reflexión.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 27
Medidas de variabilidad

Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión.

Nexos

En grados anteriores aprendiste a analizar situaciones en las que la media aritmética o mediana son útiles para comparar dos conjuntos de datos. También aprendiste acerca de las propiedades de la media y la mediana y resolviste situaciones de medias ponderadas. Todos estos conocimientos te serán de utilidad para analizar la dispersión de un conjunto de datos.

Relaciónalo con...

Educación para la salud. La revisión médica periódica ayuda a diagnosticar y tratar oportunamente efermedades como la hipertensión.

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. En un hospital se registra el pulso (número de latidos por minuto) de cada paciente tres veces al día. Los registros de tres pacientes en determinado día se muestran en la Figura 1.

REFERENCIA	HORA	PACIENTES 1	2	3	OBSERVACIONES
PULSO	8:00	78	64	62	D. líquidos, D. blanda
PULSO	13:00	72	90	84	Cambio de suero
PULSO	18:30	77	72	90	Revisión constante

Figura 1

a) ¿Cuál es la pulsación más baja de cada paciente? ¿Y la más alta?
b) ¿Cuál es el promedio de latidos por minuto de cada paciente?
c) Si para dar de alta a alguno de los pacientes una de las condiciones es que el registro de su pulso sea estable, ¿cuál de los pacientes podría ser dado de alta? ¿Por qué?
d) ¿Cuál de los tres pacientes presenta mayor variabilidad en sus pulsaciones?
e) ¿En cuál de los tres pacientes se puede decir que el promedio es el que mejor representa al conjunto de datos?

Reúnete con algún compañero y comparen sus respuestas. Discutan acerca de qué herramientas estadísticas además del promedio pueden utilizar para interpretar datos provenientes de distintas fuentes de información y las características de éstos.

En construcción

Analicen la siguiente información y respondan lo que se pregunta.

La tensión arterial

La tensión arterial (comúnmente conocida como presión arterial) es la fuerza o presión que lleva la sangre a todas las partes del cuerpo. La lectura de la presión arterial se compone de dos presiones, la presión sistólica (máxima) y la presión diastólica (mínima). Por ejemplo, en un adulto las cifras normales de la presión arterial sistólica están por debajo de 120 mmHg y de 80 mmHg de diastólica (mmHg = milímetros de mercurio).

Tensión arterial:	Sistólica (mmHg)	Diastólica (mmHg)	Recomendación
demasiado baja	< 100	< 60	Consulte a su médico
óptima	100 -120	60 - 80	Autocontrol
normal	120 -130	80 - 85	Autocontrol
ligeramente alta	130 -140	85 - 90	Consulte a su médico
muy alta	140 - 160	90 - 100	Solicite ayuda médica
demasiado alta	160 - 180	100 - 110	Solicite ayuda médica

Tabla 1. Fuente: http://www.microlife.es/healthguide/hypertension/faq/general/ (última consulta: 27 junio 2013).

1. Para realizar un estudio acerca de la salud de un grupo de pacientes se les tomó la presión arterial. Los resultados de la presión arterial diastólica fueron los siguientes:

95, 90, 85, 90, 80, 75, 100, 75, 80, 80, 110, 105,
90, 80, 75, 80, 80, 80, 80, 80, 85, 80, 100, 90, 95

a) ¿Cuál es la media aritmética de la tensión arterial diastólica del grupo de pacientes?
b) Un médico lee el resultado de la presión arterial promedio y diagnostica que el grupo de pacientes no presenta ningún problema con su presión arterial. Consulta en la Tabla 1 los límites normales de presión y escribe tu opinión acerca del diagnóstico médico.
c) Comparen los datos y describan cómo es la variación o la dispersión de los datos respecto al valor promedio de la presión arterial.
d) ¿La mayoría de los pacientes están en los límites normales?
e) Si la **amplitud** o el **rango** de un conjunto de datos es la diferencia entre el dato mayor y el menor, ¿cuál es la amplitud del conjunto de datos?

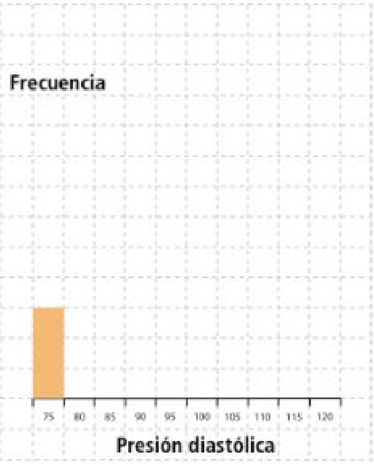


Figura 2

f) Completen en la Figura 2 la gráfica de frecuencias de los datos y ubiquen la media aritmética.
g) ¿La media se ubica en el centro del rango o amplitud de los datos?
h) ¿La mayoría de los pacientes están en los límites normales (60 a 85)?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Luego, de acuerdo con el valor de la media, ¿qué recomendaciónes les harían a los pacientes? Escríbanlas y coméntelas con todo el grupo.

Resuelvan el siguiente problema:

2. Para detectar problemas cardiacos en un grupo de deportistas, se hizo un estudio sobre el pulso (latidos por minuto) antes y después de hacer ejercicio. Los datos obtenidos se muestran en la Tabla 3.

Pulso (Pulsaciones / minuto)										
En reposo	62	64	68	68	68	68	72	72	72	72
Después del ejercicio	132	133	135	136	136	137	139	141	142	144
Pulso (Pulsaciones / minuto)										
En reposo	76	76	76	80	80	80	84	84	84	90
Después del ejercicio	150	150	150	152	153	153	155	159	159	160

Tabla 3

a) ¿Cuál es la amplitud o rango de cada conjunto de datos?
Amplitud de datos del pulso en reposo = ____________________
Amplitud de datos del pulso después del ejercicio = ____________________
b) ¿Cuál es la media aritmética del número de latidos por minuto en cada caso? (Utilicen su calculadora).
Media de los datos del pulso en reposo = ____________________
Media de los datos del pulso después del ejercicio = ____________________
c) ¿En qué caso los datos están más separados o más dispersos respecto de su pulso promedio?
d) Comparen los rangos obtenidos en el inciso a, ¿cómo son entre sí?
e) Si dos conjuntos de datos tienen el mismo rango, ¿tienen la misma dispersión? Justifiquen su respuesta.
f) Escriban una conclusión acerca de la dispersión de los datos en ambos casos.

3. En los planos de las Figuras 3 y 4 elaboren las gráficas de frecuencias con los datos de cada caso y ubiquen al promedio, respectivamente.

Figura 3

Figura 4

a) ¿En cuál gráfica la distribución de los datos es más homogénea?
b) ¿En qué caso el número de pulsaciones por minuto está más disperso?
c) ¿En cuál gráfica la distribución de datos se aleja más de la media?
d) ¿Consideran que el promedio de los pulsos después del ejercicio es casi el doble que el promedio de los pulsos en reposo? Expliquen.
e) ¿Sucede lo mismo con el rango? Argumenten.
f) ¿Los pulsos mayores que la media están más dispersos que los pulsos menores que la media? ¿Por qué?

4. Calculen el promedio y el rango de los siguientes pares de series de datos para comparar su dispersión.

Serie A: 50, 53, 56, 51, 52, 55, 54
Serie B: 53, 23, 73, 33, 43, 63, 83
Serie C: 120, 130, 140, 150, 160, 170
Serie D: 120, 160, 167, 168, 169, 170

a) ¿Qué características encuentran en los pares de datos? Escríbanlas en su cuaderno.

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas, así como sus procedimientos o cálculos que hayan realizado y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas. Luego, discutan y escriban sus conclusiones sobre lo siguiente:

- Si dos conjuntos de datos tienen la misma amplitud, entonces, ¿tienen la misma dispersión?
- Si dos conjuntos de datos tienen la misma media pero con rangos diferentes, ¿estos conjuntos tendrían la misma dispersión?

Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

En la cima

Analicen la siguiente información:

Cuando decimos que la dispersión de una serie es pequeña, es porque los datos están agrupados en la cercanía de su media, la dispersión es grande si los datos están alejados de ella. Con base en lo anterior, se puede definir la dispersión en función de las distancias que existen entre los números y su media. Ahora bien, estas distancias pueden ser vistas como la desviación entre los elementos en cuestión; es decir, si hay mucha distancia, decimos que se desvió mucho el número de la media, y así por el estilo.

Por lo que la dispersión de los datos puede cuantificar qué tan próximos o alejados están de la media ($\overline{X}$). Esta cuantificación se conoce como **desviación media** (*Dm*) y se define como la media aritmética de las distancias de cada valor a la media de los datos.

1. A partir de lo anterior, completen las Tablas 4 y 5, y calculen la desviación media de cada una de serie de datos C y D de la actividad 4 de la sección "En construcción". Utilicen su calculadora.

Serie C

x	$x-\overline{X}$	$\lvert x-\overline{X}\rvert$
120	-25	25
130	-15	15
140	-5	5
150	5	
160	15	15
170		
Total		90
$Dm = \frac{\quad}{6} =$		

Tabla 4

Serie D

x	$x-\overline{X}$	$\lvert x-\overline{X}\rvert$
120		
160		
167		
168		
169		
170		
Total		
$Dm = \frac{\quad}{6} =$		

Tabla 5

a) De acuerdo con los resultados, ¿cuál serie de datos tiene mayor dispersión?
b) ¿La *Dm* indica el grado de variabilidad?
c) Construyan en su cuaderno la gráfica de frecuencias de cada serie de datos y analícenla.
d) ¿Cuál gráfica corresponde a la menor y a la de mayor desviación media?
e) Si no existiera dispersión en las calificaciones, ¿cómo sería la gráfica de frecuencias y cómo serían los datos de las series?

Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En los casos donde no coincidan, verifiquen sus procedimientos de cálculo. Luego discutan la siguiente pregunta:

- ¿A mayor desviación media, mayor dispersión del conjunto de datos y viceversa?

De manera grupal y con la guía de su profesor comenten sus respuestas; a partir de ellas enriquezcan su aprendizaje acerca de las propiedades de la desviación media.

Luego, discutan los casos en que el rango es un mejor indicador de la dispersión en un conjunto de datos con desviación media, el rango y la dispersión son ambos medidas representativas de la dispersión y la desviación media es un mejor indicador de la dispersión de un conjunto de datos.

RDT

1. Visita la página electrónica:
http://www.alcula.com/es/calculadoras/estadistica/desviacion-media/ (última consulta: 27 de junio de 2013).
Usa la calculadora de desviación media para verificar los resultados que obtuviste en las actividades realizadas anteriormente. Comenten en clase acerca de la utilidad de esta herramienta.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. La revista *Ahorra en Grande* hizo una investigación en el estado de Jalisco sobre el precio de un suavizante de telas de marca muy reconocida en 10 tiendas departamentales y en 10 de abarrotes. Los datos que obtuvieron se muestran en la Tabla 6.

	Precio del suavizante
Tiendas departamentales	\$25, \$25, \$26, \$24, \$30, \$25, \$23, \$23, \$24, \$29
Tiendas de abarrotes	\$25, \$ 28, \$28, \$28, \$24, \$29, \$23, \$25, \$28, \$29

Tabla 6

a) Calcula el precio promedio del suavizante en cada establecimiento.
b) ¿Cuál es la desviación media de los precios en cada tipo de tienda?
c) ¿En qué tipo de tienda el precio tiene menor variación?
d) ¿En qué establecimiento el precio promedio representa significativamente al costo del suavizante? ¿Por qué?
e) ¿Cuál es el rango de precios en cada establecimiento?
f) ¿En qué tiendas el precio del suavizante tiene menor rango? ¿Estas tiendas también presentan la menor desviación media?
g) Para cada tipo de tienda ¿qué medida de dispersión representa mejor la variación de los precios del suavizante de telas? Justifica tu respuesta.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Cooperé en las dudas o aportes para mejorar el aprendizaje.			
Mostré tolerancia hacia mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Calculó correctamente la desviación media y el rango para obtener información acerca de la dispersión de conjunto de datos.			
Identificó las diferencias entre la desviación media y el rango.			
Participó en las reflexiones grupales con atención y respeto a la intervención de sus compañeros.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Reactívate

Lee los textos y resuelve las actividades que se plantean.

Programa computacional

Se quiere hacer un programa computacional que sume los primeros números naturales, el usuario indicará hasta cuál número se debe sumar. Por ejemplo, si el usuario inserta el número 3, el programa calcula $1 + 2 + 3 = 6$; y si inserta el número 5, el programa calculará $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

1. ¿Cuál fórmula se debe escribir en el programa? Justifica tu respuesta.

a) $3n^2 + 1$

b) $\frac{n^2+n}{2}$

c) $3n^2 - 1$

d) $\frac{n^2-n}{2}$

2. ¿Qué número se debe insertar en la fórmula para que la computadora dé como respuesta 5 050? Muestra tus operaciones.

Fibra óptica

La fibra óptica es un material que tiene un uso importante en las telecomunicaciones por la velocidad a la que se propaga la información. Para un tendido se usa una maquinaria especial que va rompiendo la carpeta de asfalto. Las interconexiones se realizan en cada kilómetro, como se muestra en la Figura 1.

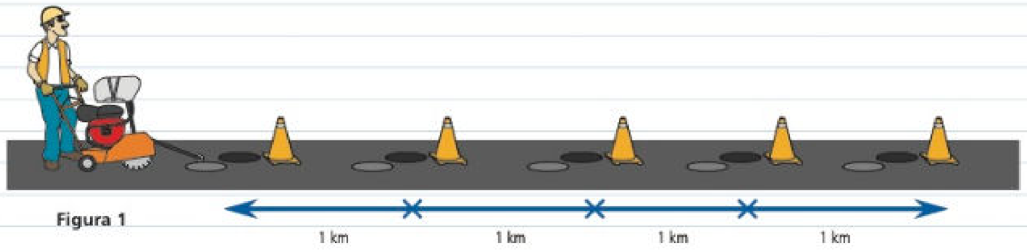


Figura 1

Una empresa de telecomunicaciones ha enviado a varios trabajadores a medir la distancia que hay entre 14 registros y calcular el margen de error a negociar con la empresa responsable de realizar el tendido de fibra óptica, ya que ésta cobra por cada metro lineal exacto que recorre la máquina que rompe el asfalto.
Las mediciones que han obtenido, en metros, son las siguientes:

998.5, 1001.3, 999.7, 997.5, 998.9, 1002.1, 997.9, 998.9, 1001.1, 999.1, 1000.7, 1000.4, 999.4, 1002.8

Al analizar la dispersión de los datos, se obtuvieron los siguientes resultados:

Promedio: 999.9 m
Desviación media: 1.3 m

1. ¿Cuál es el rango de variación entre las medidas? Registra tus operaciones.

2. Dadas las mediciones, ¿cuál es el margen de error a negociar con la empresa encargada de abrir la carpeta de asfalto? Da argumentos matemáticos.

Lee los textos y resuelve las actividades que se plantean.

El mirador

Eduardo fue a un mirador y observó cuatro monumentos ubicados como se indica en el mapa de la Figura 2.

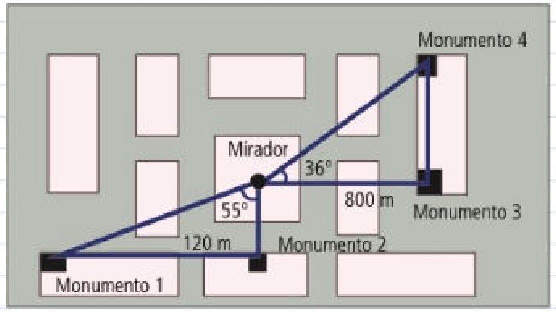


Figura 2

1. De acuerdo con el mapa, ¿cuál razón trigonométrica se puede emplear para calcular la distancia entre el mirador y el monumento 1? Da argumentos matemáticos.

2. ¿Cuál es la distancia entre el monumento 4 y el mirador? Muestra tus operaciones.

3. ¿Cuál es la distancia que existe entre el monumento 3 y el monumento 4? Muestra tus operaciones. Considera que $\text{sen } 36° = 0.5877$; $\cos 36° = 0.8090$; $\tan 36° = 0.7265$.

Domos

Un arquitecto está diseñando la estructura de un domo que formará parte de un edificio moderno.
Algunos datos calculados se muestran en la Figura 3.

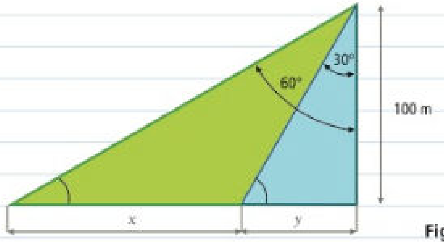
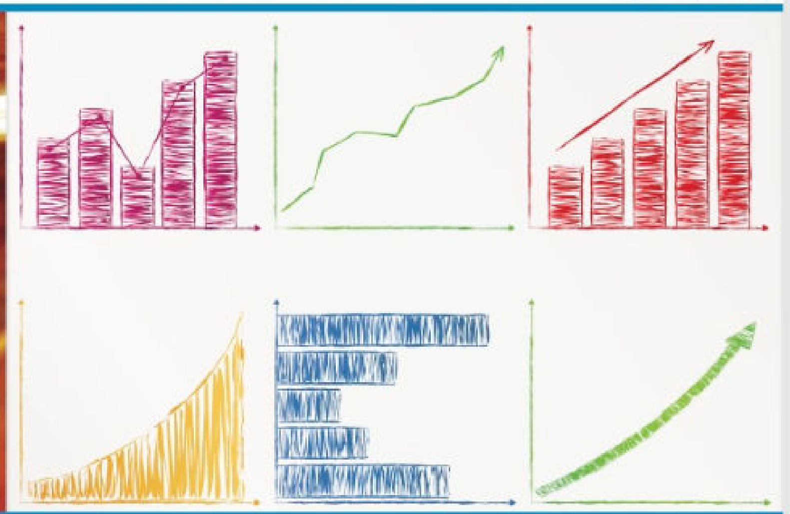


Figura 3

1. ¿Cuáles son las medidas representadas con las literales x y y? Muestra tus operaciones.

Considera que $\text{sen } 30° = 0.5$; $\cos 30° = 0.8660$; $\tan 30° = 0.5773$; $\text{sen } 60° = 0.8660$; $\cos 60° = 0.5$; $\tan 60° = 1.7320$.

Bloque 5



Aprendizajes esperados:

- Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado.
- Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones.
- Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.
- Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Competencias que se favorecen:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Acertijo

Las velas

Disponemos de unas velas que tardan en quemarse exactamente una hora. Sin embargo, las velas son irregulares, es decir, no podemos asegurar que media vela se consuma en media hora. Si podemos usar cuantas velas queramos, ¿de qué forma podríamos medir exactamente 15 minutos?

		Dosificación del docente
Lección 28. Uso de ecuaciones	Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.	
Lección 29. Cortes de cilindros y conos	Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.	
Lección 30. Relaciones entre conos, cilindros, prismas y pirámides	Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides.	
Lección 31. Problemas volumétricos	Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.	
Lección 32. Variación lineal y cuadrática	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	
Lección 33. Juegos justos	Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.	

Lección 28
Uso de ecuaciones

Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

Nexos

En grados anteriores aprendiste a resolver problemas que implicaban el planteamiento de una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones lineales de 2 × 2 con coeficientes enteros. Y en este grado has aprendido a resolver problemas que implicaban el planteamiento de una ecuación cuadrática. En conjunto todos estos conocimientos te serán de gran utilidad para modelar con ecuaciones diversas situaciones problemáticas o para plantear problemas a partir de un modelo de ecuación o ecuaciones.

Explora

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. En un espectáculo llevado a cabo en un parque el fin de semana, un hombre se hace pasar por mago y plantea el siguiente truco a uno de los espectadores ahí presentes:

- Piensa un número...
- Súmale 2 al número pensado...
- Multiplica por 3 el resultado...
- Al resultado réstale 3...
- Divide entre 3 ...
- Resta 4 ...
- Dime cuál es el resultado y te diré qué número pensaste.

El espectador dice: 2.
Instantáneamente el mago afirma con seguridad:
- El número que pensaste fue el 5.

Y el espectador responde: ¡ES CIERTO!

a) ¿Que hizo el mago para saber qué número pensó el espectador? Argumenta tu respuesta.

b) Representa algebraicamente el planteamiento mágico del mago y determina la expresión algebraica que le permite al mago adivinar el número que piensa el espectador.

c) ¿Cómo utiliza el mago la expresión del inciso anterior para adivinar el número que piensa el espectador?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros y entre ustedes jueguen a adivinar el número que pensaron.

En construcción

Resuelvan los siguientes problemas.

1. Joel está cursando tercer grado de secundaria y su maestra le dejó de tarea resolver un problema. Pero debido a un contratiempo ya no pudo terminarla y sólo le dio tiempo de hacer lo que está en la Tabla 1.

Lean detenidamente el problema y complétenlo contestando las preguntas que se les plantean.

"Adriana tiene una hermana. Actualmente su hermana tiene 14 años menos que ella pero dentro de 4 años Adriana tendrá el triple de la edad de su hermana. ¿Cuál es la edad de Adriana y de su hermana?"

	Hoy	En 4 años
Adriana	x	$x + 4$
Su hermana	$x - 14$	$(x - 14) + 4 = x - 10$

Tabla 1

a) ¿Qué representa x?
b) Escriban la ecuación que modela el problema y resuélvanla en su cuaderno.
c) Completen la respuesta: La edad de Adriana es de ________ y la de su hermana es de __________.

2. Formulen un problema que se pueda modelar con la ecuación que plantearon en el problema anterior. Resuélvanlo y comprueben que ambos problemas poseen las mismas respuestas, aun cuando no signifiquen lo mismo.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y en caso de dudas coméntelas con su profesor. Luego compartan entre ustedes cómo plantearon la ecuación lineal que representa el problema 1 y cuál fue el procedimiento algebraico que siguieron para solucionarla.

Reúnete con dos compañeros, analicen la siguiente información y respondan las preguntas que se plantean.

3. El sábado, Verónica fue de compras y se gastó 40% de sus ahorros en ropa y zapatos. El domingo invitó a su familia a desayunar y gastó dos terceras partes del dinero que le quedaba por lo que ahora sólo le quedan $600. Si x representa la cantidad que tenía ahorrada Verónica, contesten:

a) ¿Cómo se expresan algebraicamente las siguientes afirmaciones?

"Lo que tenía menos 40% de esa cantidad".
"Dos terceras partes de lo que le quedaba".
"$600 más dos terceras partes de lo que le quedó de sus ahorros, más 40% de sus ahorros es igual a lo que tenía ahorrado".

Relaciónalo con...

Educación financiera y del consumidor. Recuerda que es importante adquirir el hábito del ahorro y la organización de gastos y finanzas personales para tener una mejor calidad de vida.

b) Entonces, ¿cuánto dinero tenía ahorrado Verónica?

c) ¿Es cierto que gastó lo mismo en ropa que en invitar a desayunar a su familia? ¿Por qué?

4. Javier y Mónica acaban de comprar una casa y están decidiendo qué empresa telefónica contratar. Las tarifas telefónicas de dos de las compañías que visitaron se modelan con las ecuaciones que se muestran en la Tabla 2. Obsérvenlas y contesten lo que se les pregunta:

Compañía	Función Tarifaria
A	$y = \$100 + \$1.2x$
B	$y = \$3.2x$

Tabla 2

a) ¿Qué representa la variable y? ¿Y la variable x?

b) Describan en qué consiste la tarifa de cada compañía.

c) Si se pretende hacer un máximo de 100 llamadas mensuales, ¿cuál compañía conviene contratar? ¿Por qué?

d) Javier y Mónica han decidido contratar los servicios telefónicos de la compañía A. Si su primer pago mensual fue de \$220, ¿cuál es el número de llamadas realizadas?

e) ¿Cuánto habrían pagado en la compañía B por el mismo número de llamadas?

f) ¿Habrá algún número de llamadas en el que el costo sea igual en las dos compañías? Justifiquen su respuesta.

g) Si se grafican las funciones que modelan las tarifas telefónicas de las dos compañías se obtienen las rectas que se observan en la Figura 1. Escriban al lado de cada recta la función que la representa.

h) ¿Qué representa el punto P?

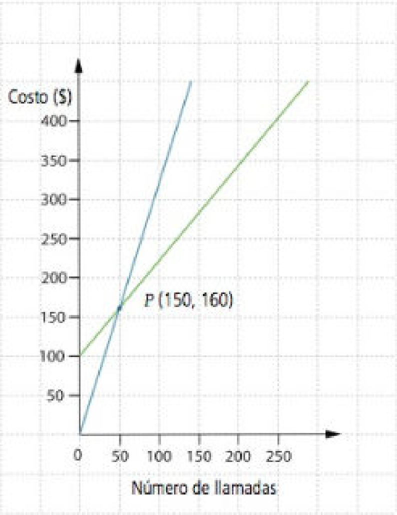


Figura 1

Tómalo en cuenta

El Congreso de Estados Unidos de América decretó en 2002 que Antonio Meucci fue quien inventó el teletrófono o teléfono.

5. Formulen un problema distinto al anterior que se modele con el mismo sistema de ecuaciones y escribanlo en la Tabla 3. Después comprueben que ambos problemas poseen las mismas respuestas, aun cuando no signifiquen lo mismo.

Sistema de ecuaciones	Problema
$y = 100 + 1.2x$ $y = 3.2x$	

Tabla 3

Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si existen dudas consúltenlas con su profesor y de manera grupal compartan entre todos las estrategias que utilizaron para resolver cada uno de los problemas.

En la redacción de los problemas revisen lo siguiente:

- ¿La redacción del problema es clara?
- ¿Tiene sentido?
- ¿Está completo?
- ¿Es necesario corregirle algo?

Resuelvan los siguientes problemas.

6. En la Figura 2 se muestra el diagrama de un patio rectangular. Si se le aumenta 5 m al largo del patio pero se le disminuyen 5 m al ancho, el área no varía. Sin embargo si se le aumentan 5 m al largo y si se le disminuyen 4 m al ancho, el área del patio aumenta 4 m².

a) Representen algebraicamente la relación entre los datos.

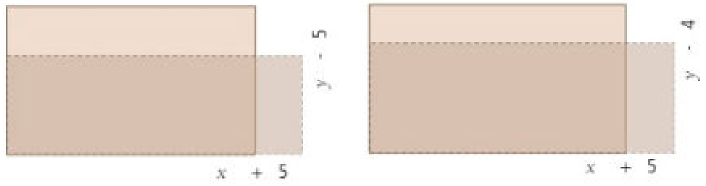


Figura 2

b) ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que establecieron para determinar el largo y ancho del patio?

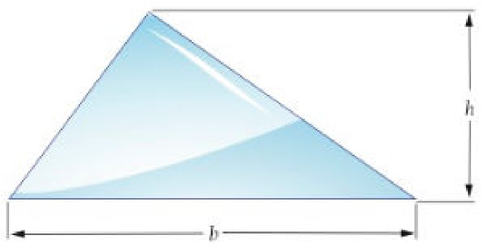
c) ¿El sistema de ecuaciones que representa el problema es único?

d) ¿Cómo pueden resolver dicho sistema?

e) ¿Cuáles son las dimensiones del patio?

7. La lámina triangular de vidrio de la Figura 3 posee una altura 3 m menor que la longitud de su base. Si el área de la lámina es de 27 m², ¿cuánto miden la base y la altura del vidrio?

Figura 3



a) Escribe la ecuación que modela la situación anterior.
b) ¿Qué tipo de ecuación es?
c) ¿Cómo pueden resolver esta ecuación?
d) ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina triangular?

8. Con el sistema de ecuaciones que plantearon para resolver el problema 6, formulen un problema distinto al original. Posteriormente con la ecuación cuadrática que formularon para responder el problema 7 redacten un nuevo problema.

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas y sus procedimientos de resolución.

En la cima

Reúnete con algún compañero y juntos realicen lo que se les indica.

1. Planteen para cada enunciado la ecuación o sistema de ecuaciones que los representa.

a) En un rectángulo cuya base mide 9 unidades más que la altura, el perímetro es igual a 98 unidades.
b) Si al doble de un número le restamos su mitad el resultado es igual a 54.
c) La base de un rectángulo es el doble que su altura y su perímetro mide 30 cm.
d) Si sumamos 5 unidades al triple de un número el resultado es el mismo que si le sumáramos 8 unidades a ese mismo número.
e) La suma de dos números es 35, y el doble del primero menos el segundo es 10.
f) El largo de un mantel rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica.

2. En su cuaderno, formulen un problema nuevo para cada ecuación y sistema de ecuaciones de la actividad anterior.

3. ¿Cuáles de las siguientes situaciones pueden representarse mediante la ecuación $2(x + 5) = 36$?

a) Dentro de cinco años el doble de mi edad será 36 años.
b) El doble de un número aumentado en 5 es 18.
c) Al número que pensé, auméntale 5, multiplícalo por 2 y obtendrás 36.
d) En una bolsa con canicas se pusieron 5 canicas más, para que el doble de canicas sean 36.

4. Formulen un problema para cada ecuación o sistema de ecuaciones.

Ecuación	Problema
$3 + 8(x + 1) = 5 + 8x$	
$3x + 4y = 10$ (1) $2x + y = 5$ (2)	
$x^2 - 12x - 28 = 0$	

Con la orientación de su profesor, validen sus respuestas con las del resto del grupo y lleguen a un consenso de ellas.

RDT

1. Visita la página electrónica http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/lenguajealgebraico/lengalgebraico02.htm (última consulta: 27 de junio de 2013).
2. Escribe las expresiones algebraicas de las situaciones que se proponen.
3. Al terminar, revisa la sección "Índice", en ella encontrarás varios temas algebraicos con los que puedes trabajar para consolidar tus conocimientos.
4. Elige alguna sección y revisa su contenido.
5. Plantea a tus compañeros actividades similares para que las resuelvan.

Compara tus respuestas y experiencias con tus compañeros. Solicita el apoyo de tu profesor en caso de dudas o dificultades.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. La edad de una madre es el triple de la de su hijo. Dentro de 10 años su edad será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?
2. Lidia se dedica a vender celulares a domicilio y el esquema de pago respecto a su salario es: $50 fijos diariamente más 20% del precio de cada celular vendido. Si hoy ganó $610 por vender un celular, ¿cuál fue el precio del celular?
3. Para realizar una actividad, se juntan dos grupos de alumnos que dan un total de 63 estudiantes y se necesitan formar 15 equipos de 4 y 5 integrantes. ¿Cuántos equipos de 4 y cuántos de 5 se pueden formar?
4. Expresen algebraicamente los siguientes enunciados:
   a) El doble de la suma de dos números: ____________________
   b) La mitad de la diferencia de dos números: ____________________
   c) El cuadrado de la suma de dos números: ____________________
   d) El triple del cuadrado de la suma de dos números: ____________________
   e) El 10% de un número: ____________________

Al terminar, solicita el apoyo de tu profesor para que entre todos organicen una puesta en común de las respuestas a las que llegaron.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché y respeté las opiniones de los demás.			
Aporté ideas e información en las actividades.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Resolvió problemas que implican el planteamiento de una ecuación lineal, un sistema de ecuaciones lineales o una ecuación cuadrática.			
Formuló problemas, con sentido, que corresponden a ecuaciones lineales, cuadráticas dadas o sistemas de ecuaciones.			
Colaboró en el planteamiento y la resolución de los problemas.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 29
Cortes de cilindros y conos

Explora

1. David es tornero, y en su trabajo constantemente tiene que usar la sierra eléctrica para cortar tubos cilíndricos de diversos materiales. En esta ocasión, debe cortar un tubo de plomo de manera tal que el corte sea paralelo a una de las bases. Observa la Figura 1 y contesta:

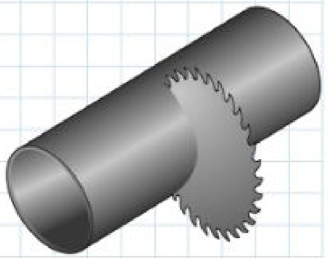


Figura 1

   a) ¿Qué forma tienen los dos tubos que se obtienen al realizar el corte?
   b) ¿Cuáles son las características de esa forma geométrica?
   c) ¿Qué forma tiene la sección transversal de los tubos que se obtienen al realizar el corte?
   d) ¿Qué características tiene la forma de la sección transversal?
   e) Si el diámetro del tubo de plomo es de 3.5 cm, ¿cuál es el radio de la sección transversal?
   f) Si los cortes se hacen perpendiculares a la base, ¿cómo serán los cuerpos generados?

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus respuestas. Discutan acerca de las características de un cilindro recto y los cortes que se mencionan en el problema.

Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en años anteriores acerca de las características del círculo, circunferencia, radio, diámetro, y los que adquiriste en las lecciones anteriores con respecto al análisis de las características y la construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos, te serán de utilidad en esta lección.

Tómalo en cuenta

La geometría abunda en la naturaleza; por ejemplo, la forma cilíndrica la encontramos en troncos de árboles o tallos de plantas.

En construcción

Reúnete con un compañero y juntos realicen las siguientes actividades.

1. Consigan vegetales, frutos u objetos que sean semejantes a cilindros rectos; por ejemplo, un trozo de zanahoria, barras cilíndricas de plastilina o velas. Seleccionen uno de los vegetales, frutos u objetos que consiguieron y cuidadosamente con un cuchillo plano realicen 4 cortes distintos al cuerpo cilíndrico que seleccionaron. Analicen los cortes y las figuras que resultan. Completen la Tabla 1 con la información que se les pide.

Tipo de corte realizado al cuerpo cilíndrico	Caras de los cuerpos generados al hacer un corte al cuerpo cilíndrico (dibújalas)	Características

Tabla 1

2. Seleccionen cuatro cuerpos cilíndricos de los vegetales, frutos u objetos que consiguieron y con cuidado realicen a cada cilindro uno de los cortes que se indican en la Figura 2.

Analicen los cortes y las figuras que resultan y completen la Tabla 2 con la información que se les solicita.

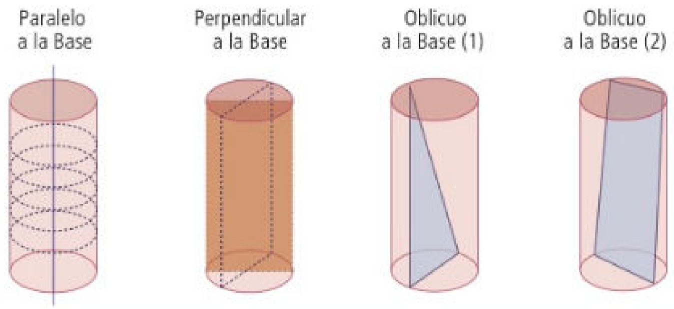


Figura 2

Corte	Paralelo a la base	Perpendicular a la base	Oblicuo a la base (1)	Oblicuo a la base (2)
Dibujo				
Características de las caras				
Características de los cuerpos generados				
Otros				

Tabla 2

a) Comparen la información de la Tabla 2 con su registro personal realizado en la actividad anterior. ¿En qué se parecen? ¿En qué difieren?
b) ¿Qué tipo de corte genera una sección transversal circular en un cilindro recto?
c) ¿Qué tipo de corte genera caras distintas a las circulares, en el cilindro recto?

Escriban una conclusión con respecto a las secciones o formas que se obtienen al realizar distintos cortes a un cilindro recto.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus conclusiones con la finalidad de que sean correctas.

En equipo, realicen las siguientes actividades.

3. Analicen el cono de la Figura 3 y contesten:

a) Si se hace un corte paralelo a la base del cono, ¿qué forma tendrán las caras?
b) Y si el corte es perpendicular a la base, ¿qué forma tendrán las caras?

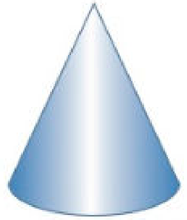


Figura 3

4. Consigan 4 conos de unicel, plastilina o barro. En cada uno de los conos realicen uno de los cortes que se muestran en la Figura 4. Analicen los cuerpos generados y anoten sus observaciones en la Tabla 3.

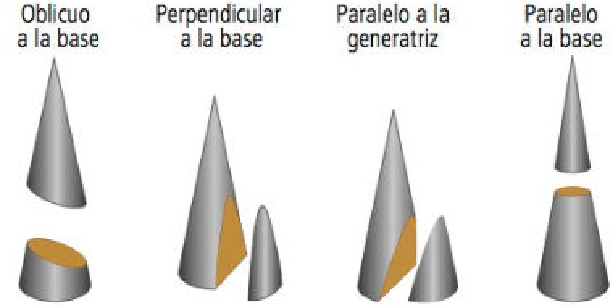


Figura 4

Corte	Oblicuo a la base	Perpendicular a la base	Paralelo a la generatriz	Paralelo a la base
Dibujo				
Características de las caras				
Características de los cuerpos generados				
Otros				

Tabla 3

a) Comparen sus observaciones con las respuestas del problema anterior, ¿anticiparon correctamente la forma de los cortes?
b) ¿Qué tipo de corte genera una cara circular en un cono recto?

c) ¿Qué tipo de corte genera caras distintas a las circulares en un cono recto?

d) Escriban una conclusión con respecto a las secciones o formas que se obtienen al realizar distintos cortes a un cono recto.

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Después, entre todos, redacten una o varias conclusiones generales acerca de las secciones o formas que se obtienen al realizar distintos cortes a un cilindro y a un cono rectos.

En la cima

Reúnete con algún compañero y respondan los siguientes planteamientos.

1. Julia en su clase de matemáticas realizó varios cortes a un cilindro y a un cono recto, sin embargo no hizo el registro de observaciones. Analiza las imágenes y determina el tipo de corte realizado, ya sea a un cono recto o a un cilindro recto.

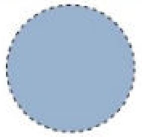
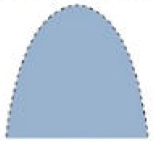
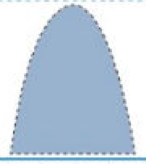
Figuras obtenidas	Corte realizado
	
	
	
	

Tabla 4

2. La Figura 5 muestra la imagen de dos conos, el cono de la derecha se obtuvo realizando, a 5 cm de altura, un corte paralelo a la base del cono de la izquierda. ¿Cuál es la medida del radio del cono de la derecha?

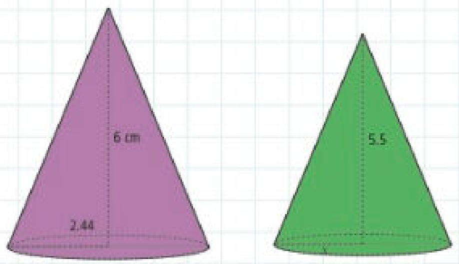


Figura 5

3. En la clase de matemáticas de Julia, el profesor propuso resolver el problema anterior de manera grupal, por lo que organizó una lluvia de ideas para resolverlo. En su participación, Julia dijo que en la imagen de los conos se identificaban dos triángulos rectángulos semejantes, a partir de los cuales se podía establecer una igualdad de razones para determinar el valor de x.

a) ¿Están de acuerdo con la participación de Julia? Susténtenlo con argumentos.

b) Expliquen porqué en la Figura 6 $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

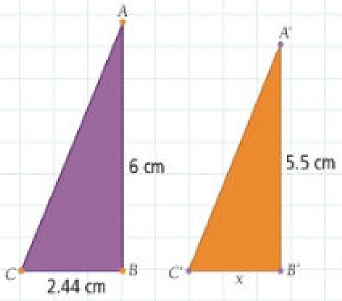


Figura 6

c) Establezcan la igualdad entre las razones asociadas a ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

d) ¿Cuál es el valor de x?

e) Suponiendo que se continúan haciendo cortes paralelos a la base del cono de 0.5 cm cada uno. Determinen la medida del radio al hacer 8 cortes, completen la Tabla 5.

Corte	2	3	4	5	6	7	8
Medida del radio							
Medida de la altura							

Tabla 5

f) Al hacerle cortes paralelos a la base del cono, ¿qué relación se puede establecer entre la variación de la altura del cono y el radio de la base?

4. Se tiene un cono recto como el de la Figura 7 cuya altura es de 9 cm. Si se realiza un corte paralelo a su base a los 0.3 cm de altura, ¿cuáles son las dimensiones del cono al hacer 12 cortes?

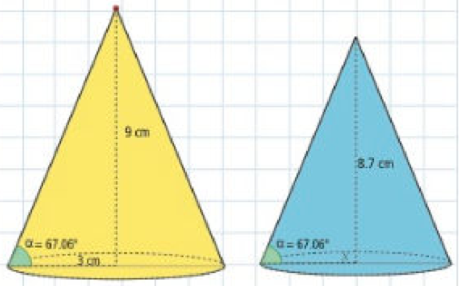


Figura 7

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, lleguen a una puesta en común donde expliquen ampliamente sus procedimientos de solución.

RDT

1. Visita las siguientes direcciones electrónicas donde podrás ampliar la información con respecto a las secciones llamadas cónicas.

http://www.didactika.com/matematica/geometria/secciones_conicas.html

http://conicas.solomatematicas.com/

(última consulta: 27 de junio de 2013).

2. Después escriban sus conclusiones con respecto a las experiencias y si hay dudas coméntenlas en su grupo con la finalidad de solucionarlas.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas. Realiza los trazos necesarios para justificar tus respuestas.

1. La gráfica de la Figura 8 representa la relación entre la altura y la medida del radio de la base circular de un cono al hacerle cortes paralelos a dicha base.

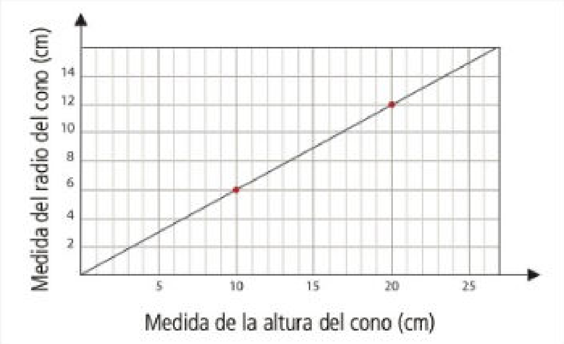


Figura 8

a) Los cortes de manera paralela a la base, ¿tienen siempre la misma medida?

b) ¿Cuántos cortes se le hicieron al cono?

c) ¿Cuál es la medida del radio de la base del cono cuando mide 10 cm de altura?

d) ¿Por qué la relación entre la variación de la medida del radio y la altura es una relación de proporcionalidad? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

e) Con la gráfica, ¿se podría conocer la medida del radio si el cono tuviera 25 cm de alto?

2. En la Figura 9 determina el radio de la base de cada uno de los conos que se generan al realizar 10 cortes paralelos a la base circular por cada 0.7 cm de altura. Después construye en tu cuaderno la gráfica con los datos obtenidos. ¿Cómo es la recta obtenida al graficar los valores?

En plenaria y con la orientación de su profesor, socialicen sus respuestas y verifiquen que sean correctas.

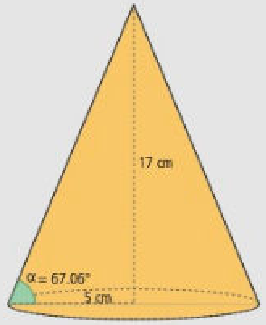


Figura 9

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Participé activamente en las actividades.			
Escuché con atención y respeto a mis compañeros.			
Participé en las discusiones del equipo y grupo.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Analizó las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto.			
Calculó las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos a la base en un cono recto.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 30

Relaciones entre conos, cilindros, prismas y pirámides

Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencias las fórmulas de prismas y pirámides.

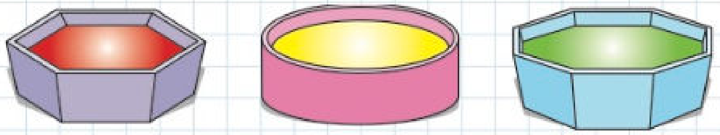
Nexos

En segundo grado de secundaria justificaste las fórmulas para calcular el volumen de prismas y pirámides rectos. Estos conocimientos te serán de utilidad para construir fórmulas y procedimientos para calcular el volumen de cilindros y conos rectos. ■

Explor@

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se pregunta.

1. Ximena vende gelatinas en diferentes presentaciones, para ello utiliza recipientes como los que se muestran en la Figura 1.



Recipiente hexagonal — Recipiente cilíndrico — Recipiente octagonal

Figura 1

La presentación más cara es la del recipiente cilíndrico ya que según Ximena requiere de mayor cantidad de gelatina para llenarlo. La presentación más económica es la del recipiente hexagonal, ya que de acuerdo con la experiencia de Ximena es el recipiente al que menos gelatina le cabe. Si la altura de los tres recipientes que usa Ximena es la misma, contesta:

a) ¿Qué piensas de los argumentos dados por Ximena?
b) ¿Cómo puedes determinar a cuál de los recipientes le cabe más gelatina y a cuál le cabe menos?
c) Usa las medidas de los recipientes rectangular y octagonal para llenar la Tabla 1 con la información que se te pide:
Recipiente octagonal, lado: 7.6 cm, apotema: 9.2 cm y altura de 5 cm.
Recipiente hexagonal, lado: 10 cm, apotema: 8.6 cm, y altura de 5 cm.

Recipiente	Hexagonal	Octagonal
Fórmula		
Procedimiento		
Medida del volumen (cm^3)		

Tabla 1

d) Al realizar los cálculos y obtener la medida del volumen de los recipientes ¿tiene razón Ximena?
e) ¿Tendrá razón con la afirmación que de los tres recipientes, el que tiene mayor medida de volumen es el recipiente cilíndrico?
f) Analiza detenidamente las bases de los tres recipientes y reflexiona acerca de sus volúmenes. Luego contesta, ¿cómo pueden calcular el volumen del cilindro.

Reúnete con dos compañeros e intercambien sus explicaciones, en caso de dudas coméntenlas con su profesor. Posteriormente, comenten entre todos la estrategia que utilizaron para calcular el volumen del recipiente con forma de prisma. Y discutan la manera en que se puede estimar la medida del volumen de un cilindro recto sin utilizar una fórmula.

En construcción

Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas.

1. Gabriela, una alumna de tercero de secundaria, afirma que hay una relación entre los prismas y el cilindro. Observen las imágenes y completen la Tabla 2 con la información que se les indica.

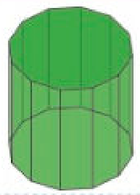
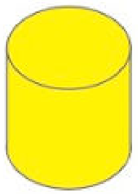
Cuerpo geométrico	Forma de la base	Diferencias entre los elementos de la base	Fórmula del perímetro de la base	Fórmula del área de la base
				
				

Tabla 2

a) ¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de un prisma recto?
b) ¿Qué significado tiene cada una de las literales que la forman?
c) ¿La fórmula se puede utilizar para calcular el volumen de cualquier prisma recto? ¿Por qué?

d) Con esa fórmula, ¿se puede conocer la medida del volumen de un cilindro recto? Justifiquen.
e) Establezcan una fórmula para conocer la medida del volumen del cilindro. Regístrenla y comprueben que funciona.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas con la finalidad de que sean correctas. Posteriormente, escriban una conclusión sobre los aspectos que se deben considerar para establecer una fórmula general para calcular el volumen de un cilindro recto cualquiera.

En equipo, realicen lo que se pide:

2. Determinen el volumen de las pirámides y cono recto de la Figura 2.

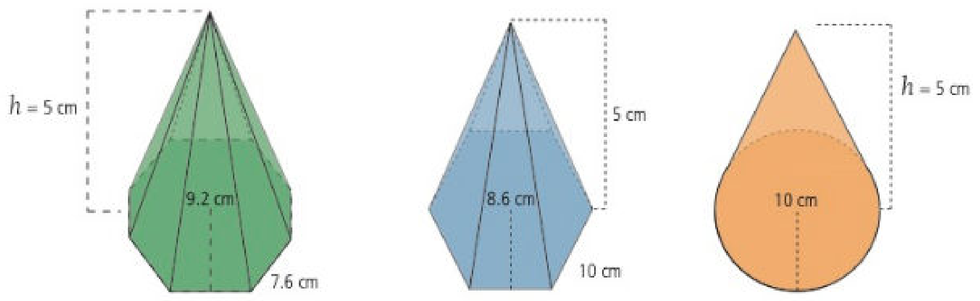


Figura 2

a) ¿Cómo obtuvieron la medida del volumen de las pirámides?
b) ¿Por qué es importante o útil tener una fórmula para calcular la medida del volumen de cualquier piramide regular?
c) ¿Cuál es la medida del volumen del cono?
d) Describan el procedimiento empleado para responder la pregunta anterior. Expliquen si su procedimiento requirió o no el uso de alguna fórmula.
e) Si ustedes tuvieran que diseñar una fórmula que les permitiera calcular el volumen de todos los conos rectos, ¿cuál sería?, ¿qué literales o símbolos matemáticos incluirían?
f) ¿Cómo pueden verificar que su fórmula serviría para todos los casos, es decir, para calcular la medida del volumen de cualquier cono recto?

3. Mireya es compañera de clase de Gabriela, ella opina que además de la relación que existe entre el volumen de los prismas y el cilindro, existe una relación entre la fórmula para conocer el volumen de una pirámide recta y la fórmula para conocer el volumen de un cono recto. Para verificar su idea, analicen minuciosamente los cuerpos geométricos de la Tabla 3 y complétenla de acuerdo con sus observaciones y conocimientos geométricos.

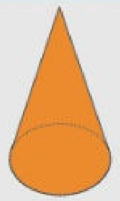
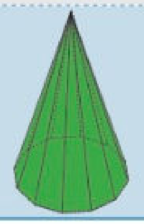
Cuerpo geométrico	Forma de la base	Diferencias entre los elementos de la base	Fórmula del perímetro de la base	Fórmula del área de la base
				
				

Tabla 3

a) ¿Cuál es la fórmula que te permite calcular el volumen de una pirámide?
b) ¿Qué literales la forman y qué significa cada una de ellas?
c) Con esa fórmula, ¿pueden conocer la medida del volumen de cualquier cono recto?
d) Escriban una fórmula o un procedimiento para conocer la medida del volumen de cualquier cono recto.
e) Comprueben su fórmula o procedimiento propuesto calculando el volumen del cono anterior. En caso de que sus respuestas no coincidan, verifiquen sus procedimientos.

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego discutan lo siguiente:

- ¿Les fue de ayuda el conocer las fórmulas de prismas y pirámides para diseñar sus propias fórmulas?
- ¿Sus fórmulas funcionan para todos los cilindros y conos rectos?
- ¿Cómo pueden comprobar que efectivamente la fórmula funciona? Expliquen a detalle.

En la cima

Reúnete con algún compañero y respondan los siguientes planteamientos:

1. Gabriela propone las fórmulas de la Tabla 4 para calcular la medida del volumen de conos y cilindros rectos.

Fórmula del cilindro recto	Fórmula del cono recto
$V = 2(A_b)\, h$ Donde V es el volumen, A_b es el área de la base, y h es la altura. Se multiplica por dos, ya que el cilindro tiene dos bases.	$V = A_b h$ Donde V es el volumen, A_b es el área de la base, y h es la altura. Aquí no se multiplica porque sólo hay una base.

Tabla 4

Analicen las fórmulas y los argumentos de Gabriela y contesten:

a) ¿Están de acuerdo con las fórmulas que diseñó Gabriela? ¿Por qué?

b) Comparen las fórmulas de Gabriela con las que ustedes diseñaron en las actividades 1 y 3 de la sección "En construcción", ¿son iguales? En caso de que no lo sean escriban en su cuaderno las semejanzas y las diferencias que se pueden establecer entre ellas.

2. Un cilindro cuyo volumen es de 785.4 cm^3, tiene 5 cm de radio y 10 cm de altura. Utilicen la fórmula establecida por Gabriela para comprobar el valor del volumen del cilindro. Posteriormente contesten: ¿el resultado que obtuvieron coincide con el valor original del volumen del cilindro?

3. Un cono recto de 261.8 cm^3 posee un radio de 5 cm y una altura de 10 cm. Apliquen la fórmula de Gabriela para corroborar el valor establecido del volumen.

4. Utilicen las fórmulas que ustedes diseñaron para calcular el volumen del cono y del cilindro de los problemas 2 y 3 anteriores.

a) ¿Coincidieron los resultados del volumen? Si no es así verifiquen para corregir sus fórmulas.

Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Después, de manera grupal, establezcan una fórmula que les permita calcular el volumen de un cilindro y un cono. Escriban en su cuaderno una o varias conclusiones acerca de los conocimientos que han adquirido a lo largo de las actividades de esta sección.

RDT

1. Visiten la dirección electrónica
http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas51.htm (última consulta: 28 de junio de 2013).
2. Discutan la información de la sección "Área de la superficie y volumen" y contesten:
a) ¿Por qué se afirma que la construcción de la fórmula del cilindro se obtiene por el mismo razonamiento que se usa para los prismas? Expliquen.
b) ¿Por qué el volumen de una pirámide regular no depende de ninguna manera del número de caras que tenga?
3. Después escriban una o varias conclusiones acerca de la actividad y compártanlas con sus compañeros.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas.

1. Se tiene un cono y un cilindro recto con la misma medida del radio y la misma medida de la altura.

a) ¿Qué relación se puede establecer entre las medidas de sus volúmenes?

b) ¿Ambos cuerpos geométricos pueden tener la misma medida del volumen?

c) ¿La medida del volumen del cono es mayor o menor a la medida de volumen del cilindro?

2. Calcula el volumen de los cuerpos geométricos de la Figura 3 y después responde los incisos a y b.

a) ¿Cómo son las medidas de los volúmenes de ambos cuerpos?

b) Establezcan una estrategia para verificar o comprobar la relación que establecieron entre ambos cuerpos geométricos.

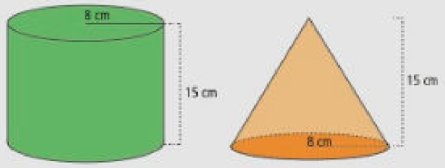


Figura 3

3. Elaboren con cartulina el cono y el cilindro del problema 2. Luego consigan arena, arroz, azúcar o cualquier otro material compacto para llenar el interior del cono. Llenen el cono con el material que consiguieron, después vacíenlo en el cilindro y repitan la operación tantas veces como sea necesario para responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas veces cabe el contenido del cono en el cilindro?

b) ¿Qué relación se establece entre las medidas de los volúmenes del cono y del cilindro cuando tienen la misma medida del radio y altura?

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas y discutan qué condiciones deben de darse para que la medida del volumen del cono sea $\frac{1}{3}$ de la medida del cilindro.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto las intervenciones de mis compañeros durante la presentación de los informes.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencias las fórmulas de prismas y pirámides.			
Participó activamente en la resolución de los distintos problemas planteados.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 31
Problemas volumétricos

Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en la lección anterior, con respecto a la construcción de las fórmulas para calcular la medida del volumen de conos y cilindros te serán de utilidad para estimar y calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas que emplearás en esta lección.

Explora

1. Miguel estudia arquitectura, y como proyecto final le han pedido elaborar un diseño para un conjunto habitacional en el que debe incluir columnas cilíndricas o estructuras cónicas. Como sugerencia el profesor recomendó en clase que se inspirara en las construcciones que se muestran en la Figura 1. Miguel, al observar las figuras, pensó en diseñar casas con terrazas sostenidas por 4 columnas, y se preguntó cuál será el volumen de las columnas cilíndricas que sostienen la terraza de la imagen.

Figura 1

Figura 2

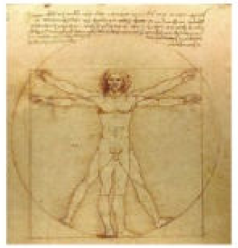
a) Para estimar la altura de las columnas toma como referencia a algunas de las personas que se encuentran cerca de la base de las mismas.
b) Si Miguel estima la medida del radio de la columna en 30 cm, ¿cuánto mide aproximadamente el volumen de la columna en metros?
c) Miguel piensa que es conveniente para el diseño del conjunto habitacional que la medida del radio de las 4 columnas que piensa incluir sea de 40 cm, ¿cuánto medirá, aproximadamente, el volumen de cada columna?
d) En el diseño del conjunto habitacional, Miguel no piensa incluir estructuras cónicas, pero aun así estimó que respecto de la Figura 2 las estructuras cónicas sólidas tienen una altura aproximada de 4.5 m y un radio de cerca de 1.5 m. ¿Cuál es su volumen?

Reúnete con dos compañeros e intercambien los procedimientos empleados para hacer las estimaciones solicitadas. Luego, respondan lo siguiente:

- ¿Coincidieron en sus procedimientos? ¿En qué aspectos difirieron? ¿Por qué?
- ¿Qué recomendaciones le darían a alguien para hacer estimaciones acerca del volumen de cuerpos cilíndricos y cónicos?

Tómalo en cuenta

Diversos artistas se han apoyado en las Matemáticas para realizar sus obras; por ejemplo Leonardo Da Vinci, basó su arte en estudios de geometría y física.



En construcción

Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas.

1. Se tienen tres cilindros con las siguientes características:
   - 34 cm de altura y 3 cm de radio.
   - 33 cm de altura y 3 cm de radio
   - 32 cm de altura y 3 cm de radio

a) Sin hacer cálculos identifiquen qué relación se puede establecer entre los volúmenes de los tres cilindros.
b) ¿Qué sucederá con el volumen al mantener constante la medida del radio y variar la medida de la altura?
c) En la Tabla 1 se han registrado las medidas del cilindro al modificar su altura. Complétenlas.

Radio (cm)	3								
Altura (cm)	31	30	29	28	27	26	25	24	23
Volumen (cm^3)									

Tabla 1

d) ¿Qué relación identifican en los datos de la tabla?
e) A medida que la altura del cilindro tiende a disminuir, ¿qué sucede con el volumen?
f) O bien, si el volumen disminuye, ¿qué sucede con la medida de la altura del cilindro?
g) Si los datos del registro tabular se mostraran en una gráfica, ¿cuáles serían sus características?
h) Construyan la gráfica en su cuaderno y verifiquen si las características que anticiparon son correctas.

Reúnete con dos compañeros y comparen sus respuestas y cálculos. Luego, en plenaria y con la orientación de su profesor respondan lo siguiente:

- ¿Cómo cambia el volumen de un cilindro recto al variar la medida de su altura?
- ¿Cómo es la gráfica que la representa?

Finalmente, escriban una conclusión sobre qué aspectos se deben de considerar para conocer el volumen de un cilindro al variar la medida de su altura y mantener constante la medida del radio.

2. Analicen la gráfica volumen-altura de la Figura 3 que corresponde a un cilindro recto.

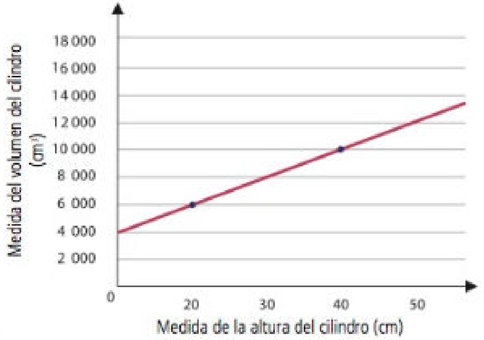


Figura 3

a) ¿Qué tipo de gráfica se ha trazado?
b) ¿Cuál es la medida del radio del cilindro?
c) La medida del radio, ¿se mantiene constante?
d) ¿Cuál es el volumen del cilindro cuando su altura es de 20 cm?
e) ¿Cuál es el volumen cuando éste tiene de altura 50 cm? ¿Y cuando mide 30 cm de alto?

3. En la Tabla 2 se registran las medidas del cilindro al modificar la medida de su radio. Complétenlas y después contesten las preguntas de los incisos a, b y c.

Radio (cm)	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Altura (cm)					25				
Volumen (cm^3)									

Tabla 2

a) ¿Cómo se relacionan entre sí en los datos de la tabla?
b) A medida que el radio del cilindro tiende a aumentar, ¿qué sucede con el volumen?
c) Si los datos del registro tabular se mostraran en una gráfica, ¿cuáles serían sus características?

4. En la gráfica de la Figura 4 se ha representado el volumen de un cilindro recto y la medida de su radio.

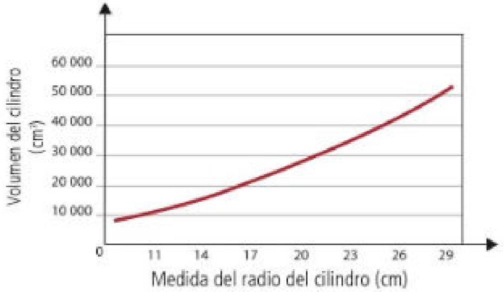


Figura 4

a) ¿Qué tipo de gráfica se ha trazado?
b) ¿La medida del radio del cilindro es la misma en cada caso?, ¿es distinta?
c) ¿Cuál es la medida de la altura del cilindro?
d) La medida de la altura del cilindro recto, ¿se mantiene constante?
e) ¿Cuál es el volumen cuando el cilindro tiene un radio de 20 cm?
f) ¿Y cuándo mide 15 cm de alto?

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego discutan lo siguiente:

- ¿Cómo es la gráfica que relaciona el volumen de un cilindro al variar la medida del radio?
- ¿Y cuando se varía la medida de la altura?
- ¿Qué tipo de relación corresponde en cada caso?

Complementen su conclusión sobre cómo se puede calcular el volumen de cilindros o cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.

En la cima

Reúnete con algún compañero y respondan los siguientes planteamientos:

1. En la Tabla 3 se han registrado las medidas de un cono recto al modificar su altura. Complétenlas y después contesten lo que se pregunta.

Radio (cm)					10				
Altura (cm)	31	30	29	28	27	26	25	24	23
Volumen (cm^3)									

Tabla 3

a) ¿Qué relación identifican en los datos de la tabla?
b) ¿Cómo cambia el volumen de un cono recto al variar la medida de su altura?
c) Si los datos del registro tabular se mostraran en una gráfica, ¿cuáles serían sus características?

Escriban una conclusión sobre qué aspectos se deben considerar para conocer el volumen de un cono al variar la medida de su altura y mantener constante la medida del radio.

2. En la gráfica de la Figura 5 se ha representado la relación entre el volumen y la altura de un cono recto.

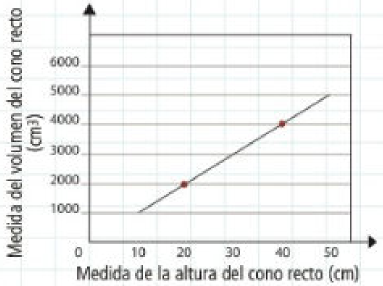


Figura 5

a) ¿Qué tipo de gráfica se ha trazado?
b) ¿La medida de la altura del cono es la misma en cada caso?, ¿es distinta?
c) ¿Cuál es la medida del radio del cono?
d) La medida del radio, ¿se mantiene constante?
e) ¿Cuál es el volumen del cono cuando éste tiene de altura 40 cm?
f) ¿Y cuando mide 150 cm de alto?

3. En la Tabla 4 se han registrado las medidas de un cono recto al modificar la medida de su radio. Complétenlas.

Radio (cm)	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Altura (cm)					12				
Volumen (cm^3)									

Tabla 4

a) ¿Qué relación identificas en los datos de la tabla?
b) A medida que el radio del cono recto tiende a aumentar, ¿qué sucede con el volumen?
c) Si los datos del registro tabular se mostraran en una gráfica, ¿qué características tendría ésta?

En plenaria y con la orientación de su profesor, comparen sus respuestas. Luego, de manera grupal, escriban conclusiones generales acerca de los conocimientos que han adquirido a lo largo de la lección.

RDT

1. Visita la siguiente página electrónica:
http://www.hdt.gob.mx/hdt/materiales-educativos-digitales/ (última consulta: 17 de noviembre de 2013)
2. Accede a la liga "ver" en 3° de Secundaria, Matemáticas III, Bloque 5 que corresponde al siguiente aprendizaje esperado y realiza lo que se indica: Estimar y calcular el volumen de cilindros y conos. Calcular datos desconocidos dados otros relacionados con las fórmulas del cálculo de volumen.
3. Realiza las actvidades que se proponen, luego elabora un resumen. Expón tu trabajo al grupo.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas:

1. Analiza la gráfica de la Figura 6 y contesta:
   a) ¿Cuál es la medida de la altura del cono?
   b) ¿Cuál es la medida del volumen cuando el radio es de 15 cm?
   c) ¿Por qué la relación entre la medida del radio y el volumen del cono se representa con una curva?

Figura 6

2. Analiza la gráfica de la Figura 7 y contesta:
   a) ¿Cuál es la medida del radio del cono?
   b) ¿Cuál es el volumen cuando la altura es de 6 cm?
   c) ¿Por qué la relación entre la medida de la altura y el volumen del cono se representa con una recta?

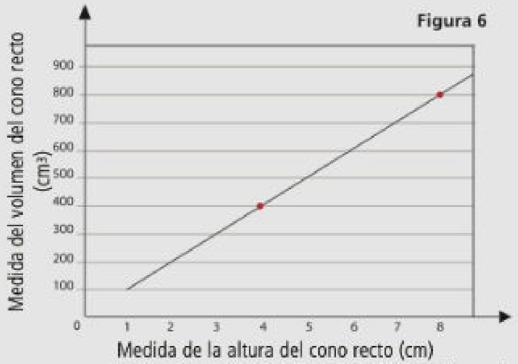


Figura 7

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto a mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Colaboró en la estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas.			
Analizó las relaciones que se establecen al variar la medida de la altura de un cono o cilindro recto y mantener fija la medida del radio y la medida del volumen.			
Analizó las relaciones que se establecen al variar la medida del radio de un cono o cilindro recto y mantener fija la medida de su altura y la medida del volumen.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 32
Variación lineal y cuadráti-

Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

Nexos

Los conocimientos que adquiriste en grados anteriores, así como en este mismo grado, acerca de resolver problemas de lectura y construcción de gráficas de funciones lineales y cuadráticas de diversas situaciones y el análisis de sus características, etcétera, serán de utilidad para resolver los problemas de esta lección. ■

Explor@

Analiza el siguiente planteamiento y responde lo que se te pregunta.

1. Para estudiar la variación de la resistencia (R) de un alambre con la temperatura (T) se hace un experimento que consiste en colocar una resistencia en un recipiente con agua destilada, que puede calentarse usando un calefactor. Para medir la resistencia (R) en función de la temperatura se requiere de un termómetro y un multímetro, colocados como se observa en el dispositivo experimental de la Figura 1.

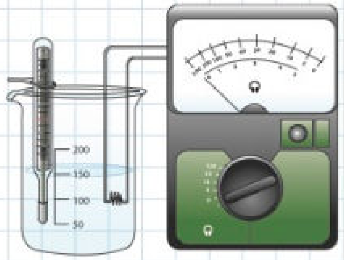


Figura 1

En un estudio sobre la variación de la resistencia del cobre (Cu), se obtuvieron los datos de la Tabla 1. Analízalos detenidamente y contesta los planteamientos de los incisos a, b y c.

T (Kelvin)	275	280	288	297	299	310	315	320	324	326	330	337	342
R (Ohm)	6.5	6.7	6.9	7.1	7.2	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0	8.2

Tabla 1

a) ¿Qué tipo de variación existe entre la temperatura y la resistencia del cobre?
b) A mayor temperatura, ¿mayor resistencia?
c) ¿Existe una relación proporcional entre las variables implicadas? ¿Por qué?

2. Con los datos de la Tabla 1 se construyó la gráfica de la Figura 2.

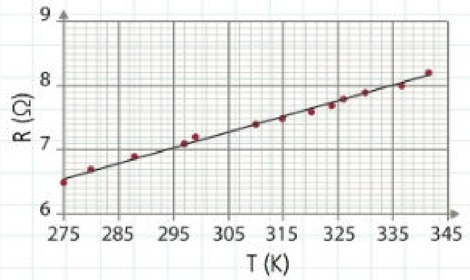


Figura 2

a) ¿La resistencia del cobre varía linealmente con la temperatura? ¿Por qué?
b) ¿Se puede concluir que en los materiales conductores, tales como el cobre, varía su resistencia con respecto a la temperatura de forma lineal? Argumenta tu respuesta.

Reúnete con un compañero y comenten cómo a partir de una tabla de datos se puede saber si la relación entre dos variables es lineal o no. Comenten también cómo pueden deducir esa misma información a partir de la gráfica que representa la relación entre ambas variables.

En construcción

Reúnete con un compañero y juntos analicen el siguiente planteamiento. Luego, realicen lo que se pide.

1. Los sólidos se dilatan cuando se calientan y se contraen cuando se enfrían. A este fenómeno se le conoce como dilatación térmica.

En un experimento, para estudiar la dilatación lineal de los cuerpos se calentó un cable de aluminio y se midió su dilatación cada vez que la temperatura del cable aumentaba 5 °C, hasta alcanzar 60 °C. Si la longitud inicial del cable de aluminio es de 30 m a la temperatura ambiente de 20 °C y el coeficiente de dilatación del aluminio es de 24×10^{-6} 1/°C, contesten:

a) ¿Cuál fue la longitud final del cable al alcanzar la temperatura de 60 °C?
Para determinarlo analicen los datos de la Tabla 2 y complétenla.

Temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Longitud (m)	30	30.00012	30.00024	35.00036					

Tabla 2

b) ¿Cuál fue la dilatación del cable al alcanzar los 40 °C de temperatura?
c) ¿Qué tipo de variación existe entre la temperatura y la longitud del cable de aluminio?

2. En el plano de la Figura 3 representen en una gráfica la relación entre los datos de la Tabla 2.

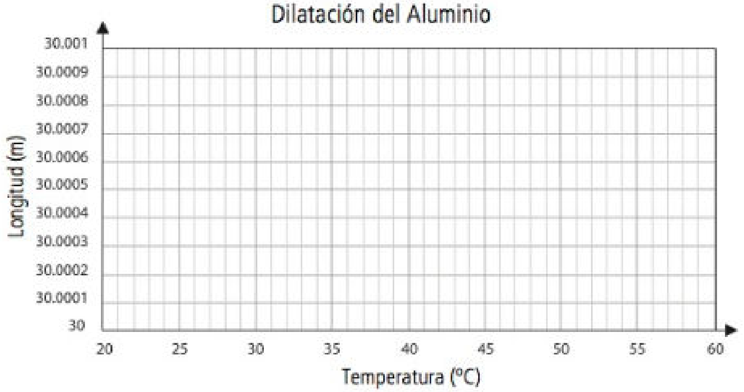


Figura 3

Luego, contesten:
a) ¿Cómo aumenta la longitud del cable al aumentar la temperatura?
b) ¿Qué tipo de variación existe en la dilatación del aluminio?
c) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación que existe entre el cambio total de longitud inicial del cable debido al aumento de la temperatura?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros y comenten entre ustedes qué cálculos hicieron para completar la Tabla 2. Después establezcan algunas conclusiones acerca de las actividades que realizaron.

Reúnete con dos de tus compañeros. Juntos analicen la información que se da en cada caso y respondan lo que se pregunta.

demanda. Es la relación entre el precio de un bien y la cantidad que se está dispuesto a adquirir en el mercado en un determinado momento.

mercado. Es toda institución social donde compradores y vendedores intercambian libremente bienes y servicios.

Caso 1. Ley de la demanda

Mientras mayor sea el precio de un producto, menor será su **demandada** en el **mercado**, y por el contrario, cuando el precio del producto disminuye aumenta la cantidad de demanda. Esta se conoce como "Ley de la Demanda", y se cumple para casi todos los bienes. Por ejemplo, si en un supermercado aumenta el precio de un kilogramo de huevo, la cantidad vendida en el corto plazo disminuirá.

3. La Tabla 3 de la siguiente página muestra la relación entre el precio de un kilogramo de huevo y la cantidad de demanda en el mercado.
a) ¿Qué tipo de variación existe entre las dos variables de la tabla?
b) ¿La relación entre las variables es lineal o cuadrática? ¿Por qué?
c) ¿Para qué precio no habría demanda de huevo?
d) Representen los datos en el plano de la Figura 4 de la siguiente página.

Demanda	
Cantidad (q) de kilogramos de demanda	Precio (P) de un kilogramo
10	$20
8	$40
6	$60
4	$80
2	$100

Tabla 3

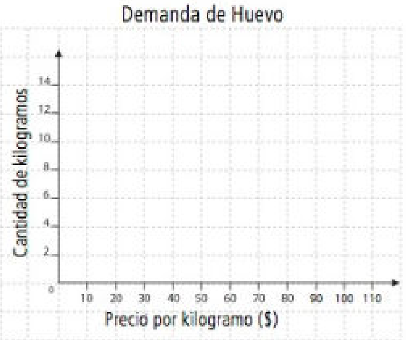


Figura 4

Relaciónalo con...

Educación financiera y del consumidor. Organizar y administrar gastos permite incluso usar la oferta y demanda de bienes o servicios a favor de la economía personal.

e) Según la gráfica, si el precio de un kilogramo de huevo es $120, ¿habría demanda del producto?

Caso 2. Ley de la oferta

Cuando los precios son muy bajos, los productores no ofrecen sus productos o servicios, debido a que no se cubren los costos de producción, es decir, se invierte más dinero de lo que se puede ganar. Pero si los precios aumentan, la situación cambia, empiezan a ofrecer sus productos o servicios en el mercado, en forma creciente, porque a mayor precio del producto o servicio, mayor será la **oferta** del mismo.

oferta. Relación entre la cantidad que el productor o fabricante está dispuesto a ofrecer a la venta de un bien y el precio a que dicha cantidad se ofrece en el mercado, en un determinado momento.

4. En un sondeo de opiniones, se les preguntó a los proveedores de huevo sobre las cantidades que están dispuestos a ofrecer en relación a distintos precios. Los datos obtenidos se muestran en la Tabla 4.
a) ¿Qué tipo de variación existe entre el precio y la cantidad de kilogramos que ofrece un productor? Justifiquen su respuesta.
b) ¿La relación es lineal o cuadrática? ¿Por qué?
c) Escriban, en su cuaderno, la expresión algebraica que representa la relación entre las dos columnas de valores.
d) En el plano de la Figura 5 de la siguiente página elaboren la gráfica de los valores de la Tabla 4.

Oferta	
Cantidad (q) de kilogramos ofrecidos	Precio (P) de un kilogramo
110	$10
410	$20
910	$30
1610	$40
2510	$50

Tabla 4

Figura 5

e) De acuerdo con la gráfica que obtuvieron contesten: ¿qué tipo de relación se da en la oferta?

Con la guía de su maestro y de manera grupal comparen sus respuestas. Luego, entre todos contesten las siguientes preguntas:

- En el caso 1, ¿la demanda es una función creciente o decreciente?, ¿por qué?
- Con respecto al caso 2, ¿lograron establecer que la ecuación de la oferta es $q = p^2 + 10$?

En la cima

Reúnete con algún compañero y realicen lo que se pide en cada caso.

1. Una marca de automóviles realiza pruebas de frenado (a control remoto) a un nuevo modelo de auto próximo a salir a la venta. Los datos obtenidos se muestran en la Tabla 5. Analícenlos y de acuerdo con sus observaciones contesten lo que se les pregunta.

Velocidad (m/s)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Distancia (m)	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5	10.8	14.9	19.2	24.3	30

Tabla 5

a) Escriban la ecuación algebraica que relacione la velocidad y la distancia de frenado.
b) Construyan, en su cuaderno, la gráfica que representa la relación entre las variables.
c) Si un automóvil viaja a una velocidad de 60 m/s y en esos momentos está colocada una barda a 50 m frente a él, al aplicar el freno, expliquen si el auto choca o no contra la barda.

Con la orientación de su profesor, validen sus respuestas con las del resto del grupo y lleguen a un consenso.

Destreza y estrategia

Resuelve el siguiente problema.

1. Un submarino lanza un cohete al nivel del mar. La función que modela la altura que alcanza el cohete, por encima del nivel del mar, es $f(t) = -t^2 + 6t - 5$, donde t es el tiempo en segundos.
   a) Construye una tabla de valores para $t = 1$ s hasta $t = 10$ s.
   b) Con los datos que obtuviste construye la gráfica de la función.
   c) Ubica en la gráfica las coordenadas del cohete al alcanzar la altura máxima.
   d) Determina el tiempo total que transcurre, desde que es lanzado el cohete, hasta que vuelve a tocar el mar.
2. Tres empresas rentan fotocopiadoras. Por el alquiler de un equipo, la empresa 1 cobra $3 000 al mes y $50 por hora de uso; la empresa 2 cobra $75 por cada hora de uso y la empresa 3 cobra $2 500 al mes y $65 por hora de uso. Escribe una expresión algebraica para cada caso, en la que se relacione el cobro mensual (C) de cada empresa en función del número de horas (h) de uso.

Al terminar, pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las repuestas a las que llegaron.

RDT

1. Visita la página electrónica http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm1.html (última consulta: 28 de junio de 2013). En ella encontrarás información complementaria sobre funciones lineales y cuadráticas en distintos contextos.
2. Contesta, ¿de cuántas maneras se puede especificar una función?
3. ¿Qué significa modelar matemáticamente una situación?

Organiza una discusión sobre las preguntas anteriores en tu grupo y comparten sus respuestas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Colaboré en las tareas asignadas.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Relacionó dos conjuntos de datos que guardan una relación lineal o cuadrática.			
Determinó la expresión algebraica lineal o cuadrática que modela una relación dada.			
Obtuvo, a partir de la gráfica de una función, información de la relación existente entre las variables involucradas.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lección 33
Juegos justos

Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables.

Nexos

En grados anteriores aprendiste a determinar el espacio muestral de un experimento probabilístico y a calcular la probabilidad de los eventos que lo componen. Además, en lecciones anteriores resolviste problemas de probabilidad en los que intervenían eventos complementarios, eventos mutuamente excluyentes e independientes. Todos esos conocimientos te serán de utilidad para el desarrollo de esta lección.

Relaciónalo con...

Educación para la paz. La resolución de conflictos por medio de la mediación y el diálogo, favorece el desarrollo de una cultura de paz dentro de la sociedad.

Explora

1. Responde los siguientes planteamientos respecto al lanzamiento de una moneda o el lanzamiento de un dado.

   a) ¿Al lanzar una moneda que no está cargada la probabilidad de que caiga águila es mayor, menor o igual que la probabilidad de que caiga sol?
   b) ¿Al lanzar un dado la probabilidad de que caiga un número impar es mayor, menor o igual que la probabilidad de que caiga un número par?
   c) ¿Al lanzar una moneda dos veces la probabilidad de que caiga (sol, sol) es mayor, menor o igual que la probabilidad de que caiga (águila, águila)?
   d) ¿Al lanzar un dado la probabilidad de que caiga un número menor que 3 es mayor, menor o igual que la probabilidad de que caiga un número mayor que 4?
   e) ¿Cómo calculaste la probabilidad de cada uno de los eventos descritos?

2. Claudia y sus hermanos acostumbran ver la televisión por las tardes, una vez que han terminado sus tareas domésticas y escolares. Pero en casa de Claudia sólo hay una televisión por lo que ella le propuso a sus hermanos echar "volados" cada vez que no estuvieran de acuerdo en ver el mismo programa. El modo de decidir consiste en lanzar dos monedas, si sale águila(A) y sol(S) Claudia decide qué canal ver; si sale sol(S), sol(S), Sonia lo decide y si sale águila(A), águila(A), Enrique decide.

   a) ¿Consideras que el juego propuesto por Claudia es justo o alguien tiene ventaja?

En construcción

Reúnete con otro de tus compañeros y juntos contesten los siguientes planteamientos.

Tómalo en cuenta

El origen de los juegos de azar con dados se remonta a los tiempos del Imperio Romano, aunque no se conocen las reglas con las que se jugaban.

1. En el grupo de Claudia, su maestra les planteó la pregunta: ¿Qué es un juego justo? A lo que varios de sus compañeros respondieron:

   - "Cuando es a la suerte"
   - "Cuando es al azar"
   - "Cuando nadie sabe lo que va a ocurrir"
   - "Cuando los participantes están de acuerdo en jugarlo"
   - "Cuando los participantes saben de probabilidad"
   - "Cuando es seguro que alguien gane"
   - "Cuando todos los participantes tienen la misma probabilidad de ganar"

   a) ¿Cuál o cuáles de las respuestas responden a la pregunta de la maestra? ¿Por qué?
   b) Mencionen algún juego en el que hayan participado y que consideran que es justo. Expliquen sus razones.

2. Retoma el análisis de la situación del problema 2 de la sección "Explora", con respecto al modo de decidir quién escoge el programa de televisión al lanzar dos veces una moneda.

   a) ¿Todos tienen la misma probabilidad de elegir qué programa ver? Justifiquen su respuesta.
   b) ¿Alguno tiene más probabilidad de ver el programa que desea?
   c) ¿Alguien siempre ve su programa favorito?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que Claudia vea el programa que desea? ¿Por qué?
   e) Y, ¿cuál es la probabilidad de que Enrique vea el programa que desea? ¿Por qué?
   f) Entonces, ¿el volado es justo para todos?

3. Todos los alumnos de tercer grado de la secundaria "Emiliano Zapata" fueron llevados a participar al programa televisivo "Demuestra tu inteligencia".

Durante el programa el conductor eligió a 3 estudiantes del grupo de 3° A para participar en el juego de "La ruleta". El juego consiste en elegir una de las ruletas de la Figura 1 y hacerla girar 3 veces. El premio de $1 000 000 en equipo de cómputo para su escuela lo obtiene quien haya acertado el mayor número de veces el símbolo de $.

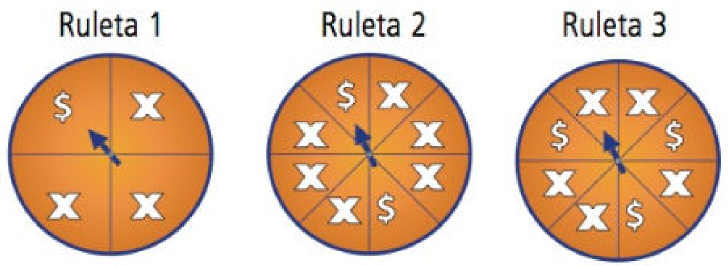


Figura 1

a) Si alguno de ustedes fuera uno de los estudiantes seleccionados, ¿cuál ruleta elegirían? ¿Por qué?

b) ¿Consideran que el juego es justo? ¿Por qué?

Comparen sus respuestas con las de otras parejas y en caso de dudas consulten a su profesor. Discutan si es necesario realizar cálculos de probabilidad para saber si un juego es justo. Argumenten sus respuestas.

Organizados en equipos de cuatro integrantes analicen el siguiente juego.

4. Para realizar el "Juego de Carreras" se emplean dos dados y un tablero como el que se muestra en la Figura 2.

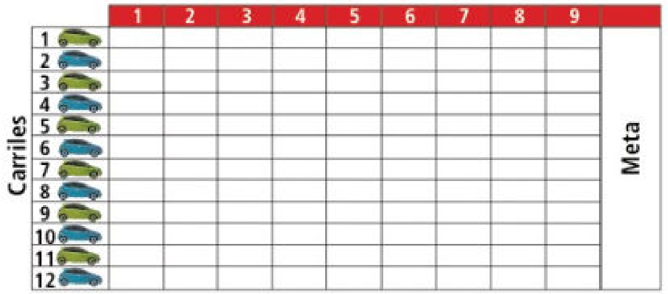


Figura 2

Cada integrante debe elegir dos autos del tablero y un objeto como contraseña personal para indicar su avance en el carril. Para iniciar el juego se procede a lanzar los dados, dependiendo de lo que marquen las caras superiores sus resultados se suman y avanza una casilla el auto cuya posición sea igual al resultado que se obtuvo. Gana el primero que llegue a la meta.

a) ¿Todos los autos tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

b) ¿Habrá un auto que tenga más probabilidad de ganar? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el auto de la posición 1?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que gane el auto 12?

e) Si volvieras a jugar, ¿qué pareja de autos elegirías? ¿Por qué?

f) ¿Qué pareja de autos no elegirías? ¿Por qué?

g) ¿Qué condiciones del juego modificarían para que sea justo? Argumenten su respuesta.

Con la guía de su maestro y de manera grupal confronten sus respuestas con las de sus compañeros y lleguen a un consenso sobre las respuestas correctas.

En el lanzamiento de una moneda o en el lanzamiento de un dado, ambos eventos tienen una característica común; en el primer caso, al lanzar una moneda ambas caras tiene la misma posibilidad de caer al igual que en el lanzamiento de un dado, cada cara tiene la misma posibilidad de caer. A eventos con estas caracteríticas se les conoce como **eventos equiprobables**, debido a que la probabilidad de ocurrencia es igual para todos los eventos.

5. Analicen en el tablero de la Figura 3 de la siguiente página el espacio muestra del lanzamiento de dos dados; luego, respondan lo que se pregunta:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar los dos dados la suma sea 7?

b) ¿La probabilidad de que la suma sea 6 es la misma que la probabilidad de que la suma sea 8?¿Por qué?

	Caras del dado 2					
Caras del dado 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,5)	(6,5)	(6,6)

Figura 3

c) ¿Qué otros eventos son equiprobables? Enuncien por lo menos 4 casos.

d) Calculen las siguientes probabilidades:

- P (el dado azul es 3) =
- P (el dado rojo no es 5) =
- P (la suma de los dados es par) =
- P (el dado azul es igual al dado rojo) =
- P (el dado azul es 2 y el rojo es 4) =
- P (el dado azul no es 1 y el rojo no es 4) =
- P (la suma de los dados es mayor que 9) =

e) A partir de lo anterior, planteen un juego para 4 personas en el que implique lanzar dos dados y que sea justo, es decir, equiprobable.

Reúnanse con otras parejas de compañeros y comparen sus respuestas. En caso de duda, coméntenla con su profesor. Luego, intercambien sus juegos y verifiquen que efectivamente es un juego justo. En caso de que no lo sea, propongan la adecuación para que lo sea.

En la cima

Reúnete con algún compañero y analicen el siguiente planteamiento, luego realicen lo que se pide:

1. Vanessa ideó un juego, para ello usa el tablero de la Figura 6 de la siguiente página, tres tarjetas de diferentes colores: una roja, una verde y una azul; y tres monedas que pintó de colores diferentes: la primera moneda con una cara azul y otra roja, la segunda moneda con una cara verde y otra azul y la última moneda con una cara roja y otra verde.

El juego es para tres concursantes a quienes reparte una tarjeta y una moneda.
Para avanzar en el tablero, los tres concursantes deben lanzar las tres monedas al mismo tiempo; si al caer dos de ellas coinciden en color, avanza dos casillas el jugador con la tarjeta del color que se repite. Gana el primero que llegue a la meta.

INICIO	1	2	3	4	5
	14	15	16	17	6
	13	META	19	18	7
	12	11	10	9	8

Figura 4

a) ¿El juego que ideó Vanessa es justo? En caso de que su respuesta sea negativa modifiquen las condiciones del juego para que lo sea.

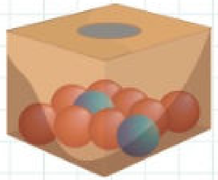


Figura 5

Para que en un juego no exista ventaja para nadie, es decir, sea un juego justo, se debe verificar que si la probabilidad de perder es n veces superior a la de ganar, entonces por cada unidad invertida se deben recibir n unidades en el caso de que se gane.

Por ejemplo, si en un concurso el premio se gana al extraer una canica azul de una urna como la de la Figura 5, la probabilidad de ganar es $\frac{2}{10}$, mientras que la probabilidad de perder es $\frac{8}{10}$.
Como la probabilidad de perder es cuatro veces mayor que la probabilidad de ganar. En este caso, para que el juego sea justo, el premio que tendría que recibir un concursante ganador debería ser cuatro veces lo que le costó el boleto del concurso.

2. De acuerdo con lo anterior, si en un concurso de lanzar un dado y adivinar el número de la cara superior, el boleto cuesta \$3; en cada una de las situaciones siguientes, ¿cuánto se debe recibir, en caso de ganar, para que el juego sea justo?
   a) "Sale par"
   b) "Sale 5"
   c) "Sale un número menor que 4"
   d) "Sale un número mayor que 2"

Con la orientación de su profesor, validen sus respuestas con las del resto del grupo y lleguen a un consenso de ellas.

RDT

Explora la página electrónica http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Azar_y_probabilidad/azar_probabilidad_1.htm (última consulta: 28 de junio de 2013).
Realiza las actividades que se plantean y comparte en clase tu experiencia y resultados. Después entre todos establezcan conclusiones generales acerca de las condiciones que se deben cumplir para que un juego sea considerado justo.

Destreza y estrategia

Resuelve los siguientes problemas y al terminar pide ayuda a tu profesor para que juntos organicen con todo el grupo una puesta en común de las repuestas a las que llegaron.

1. Un juego consta de un tablero con seis lugares numerados del 0 al 5. Para avanzar, se lanzan cinco monedas y se cuenta el número de soles que salen, ese número indica el jugador que avanza una posición. Gana el jugador que primero avance diez casillas.

a) Construye el tablero necesario para practicar el juego. ¿Cuál es tu carril favorito?
b) Haz una predicción sobre la elección del carril. Juega algunas partidas y comprueba si es acertada o crees que debes modificarla.

2. Es un juego para dos jugadores. Se lanzan dos dados y se calcula el producto de los números que aparecen. Si el resultado es par gana uno y si sale impar el otro. Argumenta si es justo el juego.

3. Para jugar al juego "Tirar al río" se necesitan dos personas, dos dados, 24 fichas y un tablero como el que se muestra en la Figura 6.
Los participantes deben elegir una orilla del río para juga y colocar, a su gusto, las 12 fichas que les corresponden en cualquiera de las casillas.
Para iniciar el juego, uno de los participantes lanza los dados; la suma de las caras obtenidas indica la casilla de la que hay que tomar una ficha (si la hubiera) y lanzarla al río. Enseguida el otro integrante debe repetir el procedimiento descrito.
Gana el jugador que primero lanza al río todas sus fichas.
Busca la mejor colocación de las fichas y justifícala.

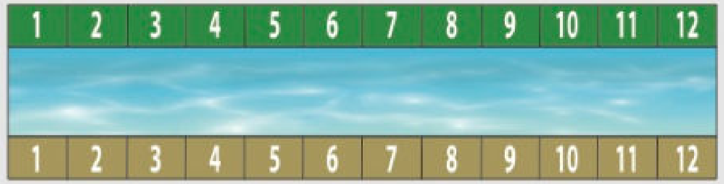


Figura 6

En plenaria y con la orientación de su profesor, realicen una puesta en común de sus respuestas y discutan las dudas que surgen con la finalidad de solucionarlas y llegar a las respuestas correctas.

Autoevaluación

Anota para cada indicador qué tanto consideras haber logrado.

Indicadores	Lo logré	Tuve algunas dificultades	No lo logré
Escuché con atención y respeto a mis compañeros.			

Coevaluación

Intercambia tu libro con algún compañero para evaluar tu desempeño durante la lección.

Aspectos a considerar	SÍ	NO	Observaciones
Identificó las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo.			
Propuso las condiciones necesarias para que un juego que no es justo lo sea.			

Analiza las observaciones hechas por tu compañero y considéralas para mejorar tu participación en las siguientes actividades.

Lee los textos y resuelve los problemas que se plantean.

Contenedor

Un tráiler que transporta líquidos utiliza un contenedor cilíndrico de 2 500 mm de diámetro y 15 000 mm de largo. Cuando el tráiler va a realizar la última entrega, llega con la tercera parte de su capacidad y transvasa el líquido a contenedores cilíndricos iguales de 10 m^3 de capacidad y cuyo diámetro mide lo mismo que el contenedor del tráiler.

Figura 1

1. Si los contendores de 10 m^3 se llenan al máximo, ¿cuántos contenedores se requieren para transvasar todo el líquido que transporta el tráiler? Da argumentos matemáticos.

2. Si alguno de los contenedores no se llena al máximo, ¿a qué altura quedará el líquido en el contenedor?

   a) 0.45 m
   b) 0.90 m
   c) 1.10 m
   d) 2.50 m

Llamadas telefónicas

1. Camilo paga una renta mensual de $300 por su línea telefónica, la cual incluye 100 llamadas. Si excede el número de llamadas le cobran una cuota de $1.75 por llamada. El último mes Camilo pagó $343.75, ¿cuántas llamadas realizó?

   a) 120
   b) 125
   c) 130
   d) 135

2. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa el cobro por llamada a partir de cien realizadas?

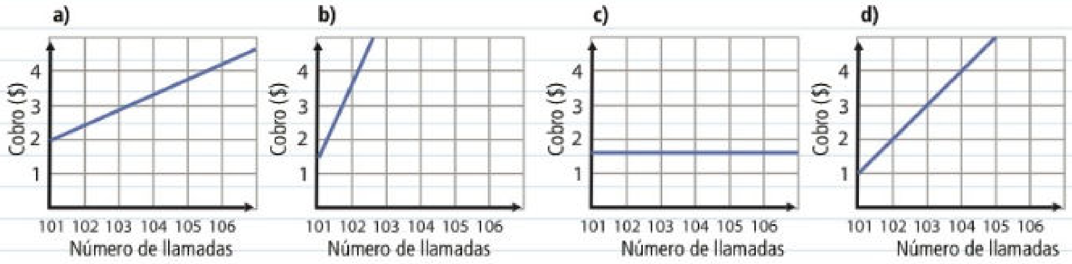


Figura 2

Experimentos

Analiza los siguientes eventos obtenidos al lanzar un dado y una moneda:

A = "Cae un número menor que 4 en el dado"
B = "Cae águila en la moneda"
C = "Cae un número múltiplo de 3 en el dado"

1. Determina lo siguiente:

   A y B = { } $P(C)$ = $P(C^c)$ =
   A y C = { } $P(A \text{ y } B)$ =
   B y C = { } $P(A \text{ y } C)$ =
   $P(A)$ = $P(A^c)$ = $P(B \text{ y } C)$ =
   $P(B)$ = $P(B^c)$ = $P(A^c \text{ y } C^c)$ =

2. ¿Cuáles de los eventos anteriores son independientes? Da argumentos matemáticos.

Modelo matemático

Un modelo matemático se puede entender como una descripción desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real. Aunque el modelo matemático no es completamente exacto, permite entender ampliamente el fenómeno que describe.

1. Expresa el volumen V de agua como función de la altura h en un instante cualquiera de un cono circular recto invertido de 6 cm de radio y de 24 cm de altura. Considera que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Registra tus operaciones.

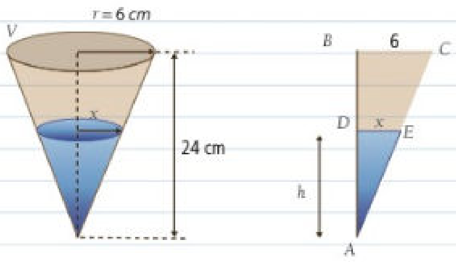


Figura 3

2. ¿Cuál de las siguientes gráficas modela el fenómeno? Da argumentos matemáticos.

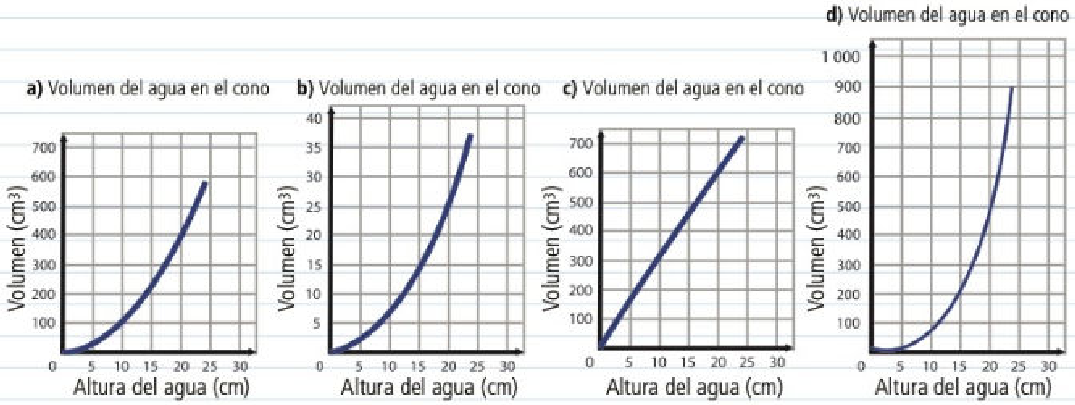


Figura 4

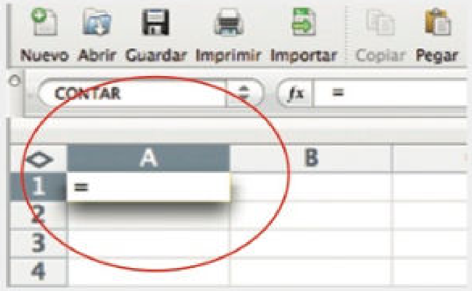
Hoja de cálculo

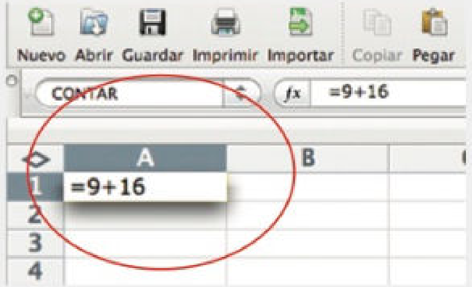
Una hoja de cálculo es un programa que permite manejar datos numéricos y hacer cálculos con ellos, entre otras cosas.

A continuación se explica cómo llevar a cabo las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación y división.

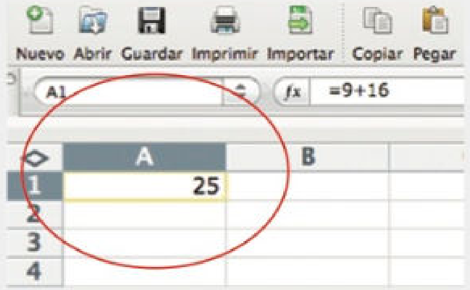
- Sumar o restar dos cantidades:

1. Se da doble clic izquierdo en una celda y se escribe el signo igual.
2. Enseguida, a la derecha del signo igual, se introducen las cantidades a sumar o restar.





3. Luego se presiona la tecla enter. En la celda aparecerá el resultado de la suma.

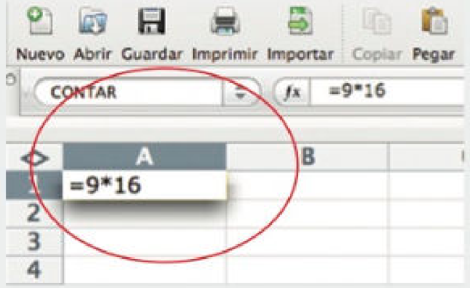


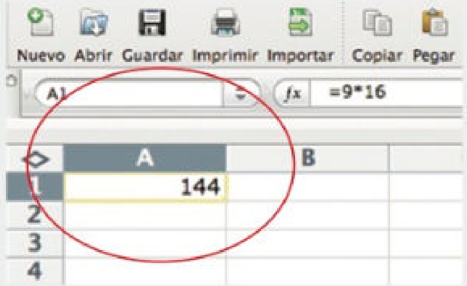
- Multiplicar o dividir dos cantidades

1. Se da doble clic izquierdo en una celda y se escribe el signo de igual =.
2. Se introducen a través del teclado alfa-numérico las cantidades que se multiplicaran o se dividirán a la derecha del signo igual:

(Observa que para multiplicar, se interpuso entre ambas cantidades un asterisco *. Si quieres dividir dos cantidades escribe entre estas una diagonal /).

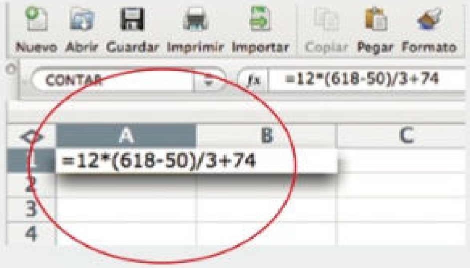
3. Luego se presiona la tecla de enter. En la celda aparecerá el resultado del producto o de la división.



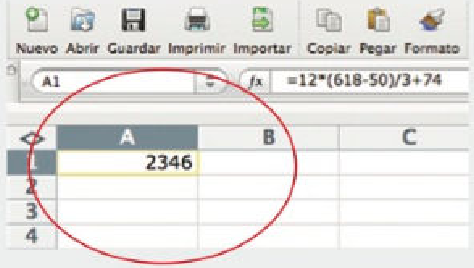


- Introducir una fórmula

1. Se da doble clic izquierdo en una celda y se escribe el signo igual =.



2. Se introduce a través del teclado alfa-numérico la fórmula deseada.
3. Luego se presiona la tecla de enter. En la celda aparecerá el resultado de la fórmula.



Bibliografía

Bibliografía consultada

ACUÑA, MANUEL, "Nocturno a Rosario", en Vicente Riva Palacio, *El parnaso mexicano: poesías escogidas de varios autores*, México, Conaculta, 2006.

ANDERSON, PERRY, *El Estado absolutista*, México, Siglo XXI, 2002.

ANÓNIMO, *Popol Vuh: el libro maya del albor de la vida y las glorias de dioses y reyes*, México, Diana, 1993.

ANÓNIMO, "Preámbulo", en *Tratado de Libre Comercio de América del Norte: texto oficial*, 1992.

ARCE SÁIZ, MARÍA MARCELINA, coord., *Barroco y cultura novohispana. Ensayos interdisciplinarios sobre filosofía política, barroco y procesos culturales: cultura novohispana*, México, Eón, 2010.

ARGAN, GUILIO CARLO, *El arte moderno*, Madrid, Akal, 2004.

ÁVILA, JOSÉ LUIS, *"La era neoliberal"*, en Enrique Semo, coord., Historia económica de México, México, Océano, 2006.

BARROS, CRISTINA, *Justo Sierra. Siempre joven*, México, UNAM-Gobierno de Campeche-INAH, 2013.

BLACK, JEREMY, *Altered states, America since the Sixties*, Londres, Reaktion Books, 2006.

______, *The age of total war*, 1860-1945, Connecticut, Praeger Security International, 2006.

______, *European warfare* 1494-1660, Londres, Routledge, 2002.

BROWMAN, DAVID L., *Cultural continuity in Mesoamerica*, Chicago, Aldine, 1978.

CARBALLIDO, EMILIO, "Pastores de la ciudad", en D.F., México, Novaro, 1973.

CÁRDENAS, LÁZARO, *Apuntes: una selección*, México, UNAM, 2003.

CLAVIJERO, FRANCISCO XAVIER, *Historia antigua de México*, México, Porrúa, 2004.

DENSON RILEY, JAMES, *Hacendados jesuitas en México: la administración de los bienes inmuebles del Colegio Máximo de San Pedro y San Pablo de la ciudad de México. 1685-1767*, México, SEP, 1976.

DIAMOND, JARED, *Collapse: how societies choose to fail or succeed*, Los Ángeles, Viking, 2005.

DÍAZ DEL CASTILLO, BERNAL, *Historia verdadera de la conquista de la Nueva España*, México, El Colegio de México, 2004.

FERNÁNDEZ, ANNA M., *Protagonismo femenino en cuentos y leyendas de México y Centroamérica*, Madrid, Narcea, 2000.

FLORESCANO, ENRIQUE, "La época de las reformas borbónicas y el crecimiento económico (1750-1808)", en *Historia general de México*, México, Colegio de México, 2009.

GAGE, THOMAS, *Viajes en la Nueva España*, México, Casa de las Américas, 1980.

GIL JUÁREZ, ADRIANA Y TERE VIDA MOMBIELA, *Los videojuegos*, Barcelona, Universitat Oberta de Catalunya, 2007.

GONZÁLEZ GALVÁN, MANUEL, *Trazo, proporción y símbolo en el arte virreinal: antología personal*, México, UNAM, 2006.

GONZÁLEZ OBREGÓN, LUIS, *Historia y leyendas de las calles de México: vidas y costumbres de otros tiempos*, México, Gómez-Gómez Hermanos, 1982.

GROSE, FRANCIS, *Principios de la caricatura*, Madrid, Difusión, 2011.

GUILLETT, CHARLIE, *Historia del rock. El sonido de la ciudad*, Barcelona, Robinbook, 2008.

HAWKINS, JOHN, *The Hawkins's voyages*, Londres, Hakluyt Society, 1878.

HAYES, KEVIN J., ed., Charlie Chaplin: interviews, Mississippi, University Press of Mississippi, 2005.

HIDALGO, MIGUEL, "Decreto contra la esclavitud, las gabelas y el papel sellado", en *La Independencia de México*, México, Instituto Nacional de Estudios Históricos de la Revolución Mexicana, 1992.

HOBSBAWM, ERIC, *Guerra y paz en el siglo XXI*, Barcelona, Crítica, 2007.

______, *Historia del siglo XX*, 1914-1991, Barcelona, Crítica, 2004.

JOSÉ VALENZUELA, GEORGETTE, coord., *Candidatos, campañas y elecciones presidenciales en México: de la*

Bibliografía sugerida para el alumno

Aprovecha tus libros de la Biblioteca de Sula de la colección Espejo de Urania.

CERASOLI, Anna. *Sorpresa de los números: Un viaje al fascinante universo de las matemáticas*, México: SEP/Ediciones Maeva, 2007 (Biblioteca de aula).

CODINA PASCUAL, Roser. *et al. Apuntes de matemáticas*, México: SEP/ Parramón Ediciones, 2007 (Biblioteca de aula).

BOSH G. Carlos. *Una ventana a las incógnitas*, México: SEP/Editorial Santillana, 2002 (Biblioteca de aula).

C. R. WYLIE. *101 desafíos a la lógica*, México: SEP/Ediciones Suromex, 2005, (Biblioteca de aula).

DE LA PEÑA, Juan Antonio. *Matemáticas y la vida cotidiana*, México: SEP/ Editorial Santillana, 2002 (Biblioteca escolar).

EUN-JEONG, Cho. *Matemáticas ocultas en la arquitectura*, México: SEP/ Altea, 2007 (Biblioteca escolar).

RUIZ, Concepción; REGULES, Sergio. *Crónicas algebraicas*, México: SEP/ Editorial Santillana, 2002 (Biblioteca de aula).

Bibliografía

Bibliografía sugerida para el profesor

ÁVILA, A. et al. *Informes de investigación temas prioritarios. La reforma realizada. La resolución de problemas como vía del aprendizaje en nuestras escuelas*, México: SEP, 2004 (Informes de Investigación. Temas Prioritarios).

BODROVA, E. LEÓN J. D. *Herramientas de la mente*, México: Pearson/SEP, 2004 (Biblioteca para la actualización del maestro).

CORDERO, F. et al, "Cinvesniñ@s. Una experiencia de difusión del conocimiento científico", en *Avance y Perspectiva*, Vol. 2, nueva época, número 4, pp. 33-47, México: Cinvestav, 2009.

PÁEZ, D., RIGO, M., GÓMEZ, B. "El papel del profesor en los procesos de auto-regulación del aprendizaje de las matemáticas en el salón de clases de la escuela elemental", en Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M., Blanco, L. J. *Investigación en educación Matemática XII*, Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, pp. 415-423, 2008.

PERRENOUD, P. *Diez nuevas competencias para enseñar*, México: SEP/Graó, 2004 (Biblioteca para la actualización del maestro).

RIGO, M., PÁEZ, D., GÓMEZ, B. "Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un Marco Interpretativo", en *Enseñanza de las Ciencias*, 28.3, pp. 405-416, Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona, 2010.

RIGO, M., ROJANO, T. & PLUVINAGE, F. "Las prácticas de justificación en el aula de Matemáticas", en *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, Vol. 5, pp. 93-104, España: Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática, 2011.

Una mirada a la ciencia. Antología de la revista ¿Cómo ves?, México: UNAM/SEP (Biblioteca para la actualización del maestro), 2000.

Páginas electrónicas para el alumno

Acertijos matemáticos: http://www.acertijos.net/
Páginas de acertijos y juegos (última consulta 7 julio 2013, 17:09 horas)

http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_3_t_2 html?open=instructions
La balanza algebraica. En esta dirección electrónica encontrarás un simulador que te permitirá practicar el tema de ecuaciones (última consulta 7 julio 2013, 17:13 horas).

http://www.hdt.gob.mx/hdt/
En esta página encontrarás actividades interactivas sobre temas que estudias en la secundaria (última consulta 7 julio 2013, 17:16 horas).

http://basica.sep.gob.mx/dgdgie/cva/gis/
En esta página encontrarás diversos desafíos matemáticos interactivos que te servirán de apoyo para consolidar tu conocimiento en diversos temas de secundaria (última consulta 7 julio 2013, 17:22 horas).

http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx/
En esta página encontrarás actividades interactivas sobre temas relacionados con la educación secundaria (última consulta 7 julio 2013, 17:29 horas).

Bibliografía

Páginas electrónicas para el profesor

http://recursostic.educacion.es/buenaspracticas20/apls/MediaWiki/index.php/Categor%C3%ADas_de_Matem%C3%A1ticas_en_la_ESO
Aquí encontrará información, recursos y actividades referentes a temas de educación matemática (última consulta 7 julio 2013, 17:36 horas).

http://marcojrivera.webs.com/31pensamientoaleatorio.htm
Página que alude al desarrollo del pensamiento aleatorio, inclusive cuenta con un foro en educación estocástica y actividades para el aula (última consulta 7 julio 2013, 17:42 horas).

http://translate.google.com.mx/translate?hl=es&sl=en&tl=es&u=http%3A%2F%2Fnlvm.usu.edu%2Fen%2Fnav%2FvLibrary.html
En esta página con uso de software virtual, encontrará actividades acerca de números y operaciones, álgebra, geometría , medición, análisis de datos y probabilidad (última consulta 7 julio 2013, 17:50 horas).

http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/asig4.htm
Aquí encontrará algunas conferencias sobre Formas y Transformaciones, por ejemplo, la conferencia “La forma geométrica (áreas y perímetros)” (última consulta 7 julio 2013, 17:56 horas).